PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 6. 15. März 1914. Redaktionsschluß für No. 7 am 14. März 1914. 15. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

J. Stark, Über die inneratomische und die lichtschwingende Geschwindigkeit der Serienelektronen. S. 265.

W. Mecklenburg u. S. Valentiner, Über die Abhängigkeit der Fluoreszenz von der Konzentration. S. 267.

R. J. Strutt, Das Nachglühen der elektrischen Entladungen in Gemischen von Stickstoff mit Sauerstoff. S. 274.

W. Dehlinger, Ultrarote Dispersion zweiatomiger Kristalle. S. 276.

S. Boguslawski, Zur Theorie der Dielektrika. Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante. Pyroelektrizität. S. 283.

H. Mache, Ein einfacher Apparat zur Demonstration der Wilsonschen Versuche über die Sichtbarmachung der Bahnen ionisierender Teilchen. S. 288.

R. Holm, Zur Theorie des Glimmstroms. II. S. 289.

J. Ishiwara, Grundlagen einer relativistischen elektromagnetischen Gravitationstheorie. S. 294.

M. T. Huber u. S. Fuchs, Spannungsverteilung bei der Berührung zweier elastischer Zylinder. S. 298.

W. Hillers, Nachtrag zu einer Bemerkung über die Abhängigkeit der dreifachen Luftspiegelung nach Vince von der Temperaturverteilung. S. 303.

W. Hillers, Einige experimentelle Beiträge zum Phänomen der dreifachen Luftspiegelung nach Vince. S. 304.

M. Wolfke, Welche Strahlungsformel folgt aus der Annahme der Lichtatome? S. 308.

A. Garbasso, Zusatz zu meiner Arbeit „Theoretisches über das elektrische Analogon des Zeemanphänomens". S. 310.

Besprechungen:

N. R. Campbell, Moderne Elektrizitätslehre. S. 311.

P. Volkmann, Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. 2. Aufl. S. 312.

F. Auerbach, Die Weltherrin und ihr Schatten. 2. Aufl. S. 312.

Personalien. S. 312.

Gesuche. S. 312.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die inneratomische und die lichtschwingende Geschwindigkeit der Serienelektronen.

Von J. Stark.

Unter inneratomischer Geschwindigkeit eines nicht in Lichtemission begriffenen Elektrons eines Atoms sei seine Geschwindigkeit in Bezug auf ein Koordinatensystem verstanden, welches relativ zum Atomzentrum ruht. Über eine inneratomische Geschwindigkeit von Elektronen sind bei der Behandlung des Problems der Atomstruktur verschiedene Annahmen gemacht worden. Es mag darum wertvoll erscheinen, aus der Erfahrung einen Aufschluß über die wirkliche Größe dieser Geschwindigkeit zu erhalten. Der Vergleich des Zeemaneffekts mit dem von mir aufgefundenen Effekt[1]) des elektrischen Feldes auf Spektrallinien gestattet, eine obere Grenze für die inneratomische Geschwindigkeit der Serienlinien emittierenden Elektronen („Serienelektronen") zu berechnen.

Es sei $\mathfrak{H}$ die magnetische, $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke, e die elektrische Ladung, $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit eines Elektrons relativ zum Koordinatensystem des Beobachters, c die Lichtgeschwindigkeit. Das Vorhandensein der Lorentzschen magnetischen Kraft $e\left[\mathfrak{H}\frac{\mathfrak{v}}{c}\right]$ ist durch die Untersuchung der positiven und negativen Strahlen und durch den Zeemaneffekt bei Serienlinien erwiesen worden. Wie andererseits aus dem von mir kürzlich aufgefundenen Effekt folgt, ändert sich die Frequenz eines Serienlinien emittierenden Elektrons, wenn dieses durch die elektrische Kraft $e\mathfrak{E}$ aus seiner statischen oder dynamischen Gleichgewichtslage verschoben wird, indem die Schwingungen senkrecht oder parallel zur Achse der Kraft Frequenzen annehmen, welche im allgemeinen untereinander und von der ungeänderten Frequenz verschieden sind. Man kann folgern, daß diese Frequenzänderung durch eine jede Kraft bewirkt wird, welche das Elektron aus seiner Gleichgewichtslage relativ zum Atomzentrum verschiebt. Freilich muß die deformierende Kraft am Elektron ebenso wie $e\mathfrak{E}$ einen hinreichend großen Wert annehmen, wenn die von mir für den Fall der elektrischen Kraft beobachtete Frequenzänderung merkbar werden soll.

Wie nämlich einerseits die Theorie und die Erfahrung für den Zeemaneffekt lehrt, verhält sich für kleine Verschiebungen der Serienelektronen aus ihrer Gleichgewichtslage die sie rücktreibende Kraft wie eine quasielastische Kraft. Wie andererseits aus dem von mir beobachteten Effekt zu folgern ist, verhält sich die rücktreibende Kraft für große Verschiebungen infolge einer großen äußeren Kraft nicht mehr quasielastisch.

1) J. Stark, Ber. d. Berl. Akad. **47**, 932, 1913.

Vorstehende allgemeine Folgerung kann man nun auf folgende Sonderfälle anwenden. Man kann nämlich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines Elektrons relativ zu einem ruhenden Magnetfeld in drei Teile zerlegen: erstens eine „äußere" Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_a$, welche das Elektron gemeinsam mit den übrigen Atomteilen infolge einer geradlinigen Bewegung des Atoms besitzt; zweitens eine inneratomische Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_i$ in einem Koordinatensystem, in bezug auf welches das Atomzentrum ruht; drittens eine „lichtschwingende" Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$, welche das Elektron bei den von Lichtemission begleiteten Schwingungen um seine Gleichgewichtslage besitzt.

Betrachten wir zunächst den Fall, daß $\mathfrak{v}_i + \mathfrak{v}_r$ klein gegen $\mathfrak{v}_a$ ist. Besitzen in diesem Falle alle bewegten Atome die gleiche Geschwindigkeitsrichtung, wie es in Annäherung für ein Kanalstrahlenbündel zutrifft, so legt sich auf sämtliche Elementarladungen eines bewegten Atoms in einem transversalen äußeren magnetischen Feld die Lorentzsche magnetische Kraft $e\left[\mathfrak{H}\frac{\mathfrak{v}_a}{c}\right]$, analog der elektrischen Kraft $e\mathfrak{E}$, welche ein äußeres elektrisches Feld auf die Elementarladungen eines Atoms ausübt. Diesen Fall hat zuerst W. Wien[1]) theoretisch erkannt und experimentell untersucht und wenigstens sehr wahrscheinlich gemacht, daß die Spektrallinien des Wasserstoffs für eine Sehachse senkrecht zu der Achse der Kraft $e\left[\mathfrak{H}\frac{\mathfrak{v}_a}{c}\right]$ ebenso zerlegt und polarisiert werden wie für eine Sehachse senkrecht zu der Achse einer gleich großen elektrischen Kraft $e\mathfrak{E}$.

Eine andere Folgerung betrifft den Einfluß der Temperatur auf die Schärfe der Zeemankomponenten. Infolge der thermischen Unordnung kommen in einem Aggregat von Gasmolekülen hinsichtlich Größe und Richtung alle möglichen Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_a$ vor. Steht darum die Sehachse senkrecht zu dem äußeren magnetischen Feld $\mathfrak{H}$ in einem leuchtenden Gas, so ist sie gleichzeitig senkrecht und parallel zu den an den Gasatomen ungeordnet verteilten elementaren magnetischen Kräften $e\left[\mathfrak{H}\frac{\mathfrak{v}_a}{c}\right]$; über den Zeemaneffekt, den man für sehr kleine Werte von $\frac{\mathfrak{v}_a}{c}$ erhalten würde, lagert sich darum ungeordnet der Quer- und Längseffekt der magnetischen Kraft $e\left[\mathfrak{H}\frac{\mathfrak{v}_a}{c}\right]$ und bewirkt eine Verbreiterung der Zeemankomponenten, die größer ist als die Verbreiterung der magnetisch unzerlegten Linie. Da der von mir aufgefundene Effekt für $\mathfrak{E} = 30000$ Volt $\times$ cm^{-1} 10- bis 100 mal (durchschnittlich 50 mal) größer ist als der Zeemaneffekt für 30000 Gauß, so muß sich die eben gefolgerte Verbreiterung[1]) der Zeemankomponenten (Verbreiterung gleich einem Zehntel des Komponentenabstandes) bei einer molekularen Geschwindigkeit von mehr als $2 \cdot 10^5$ cm sec^{-1} zeigen, also für Wasserstoff bei absoluten Temperaturen größer als 300°.

Um zu dem zweiten Fall überzugehen, sei neben einer hypothetischen inneratomischen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_i$ die äußere und die lichtschwingende Geschwindigkeit der Serienelektronen vernachlässigt. In Analogie zu dem vorhergehenden Fall ist ohne weiteres folgendes zu übersehen. Infolge der ungeordneten Orientierung der Atome in einem Aggregat von Gasmolekülen beobachtet man an der Serienemission in einem Magnetfeld gleichzeitig die Längs- und Quereffekte der Kräfte $e\left[\mathfrak{H}\frac{\mathfrak{v}_i}{c}\right]$. Ist darum $\mathfrak{v}_i$ größer als $2 \cdot 10^5$ cm sec^{-1}, so können in einem Feld von 30000 Gauß die Zeemankomponenten nicht mehr scharf erscheinen. Da sie aber in Wirklichkeit ebenso scharf wie die unzerlegten Linien herausgeholt werden können, so ist zu folgern, daß die inneratomische Geschwindigkeit der Serienelektronen kleiner als $2 \cdot 10^5$ cm sec^{-1} ist.

An dritter Stelle sei nun neben der lichtschwingenden Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ der Serienelektronen ihre äußere und ihre inneratomische Geschwindigkeit vernachlässigt. In diesem dritten Falle liegen besondere Verhältnisse vor. Es ist nämlich nicht mehr wie in allen bisher betrachteten Fällen die äußere elektrische oder magnetische Kraft in wechselnder Orientierung auf die lichtschwingende quasielastische Kraft gelagert, sondern es ist die Kraft $e\left[\mathfrak{H}\frac{\mathfrak{v}_r}{c}\right]$ durch die Verknüpfung von $\mathfrak{v}_r$ und der rücktreibenden quasielastischen Kraft in bestimmter Weise relativ

1) W. Wien, Ber. d. Berl. Akad. **48**, 70, 1914.

1) Da die parallel zu $\mathfrak{E}$ schwingenden Komponenten im allgemeinen einen größeren Komponentenabstand als die senkrecht dazu schwingenden Komponenten besitzen, so müssen die senkrecht zu $\mathfrak{H}$ schwingenden stärker als die parallel schwingenden Komponenten verbreitert werden. Zum Zweck der Feststellung der obigen Temperaturverbreiterung der Zeemankomponenten hat man diese mit der unzerlegten Linie zu vergleichen. Dabei darf das Magnetfeld nicht die Temperatur in der Lichtquelle indirekt etwa durch Ablenkung des elektrischen Stromes beeinflussen. Die Verbreiterung ist für verschiedene Elemente bei gleicher Temperatur offenbar proportional der Quadratwurzel aus dem Atomgewicht; die Temperaturen, welche bei verschiedenen Elementen gleiche Verbreiterungen hervorbringen, verhalten sich wie die Atomgewichte.

zu dieser orientiert. In diesem Sonderfall tritt die Lorentz-Voigtsche Theorie für die Wirkung eines Magnetfeldes auf die Lichtschwingungen von Serienelektronen in Kraft und ihre Folgerungen stehen in weitgehender Übereinstimmung mit der Beobachtung. Es scheint nun, als ob der Vergleich des Zeemaneffekts mit dem von mir beobachteten elektrischen Effekt keine Folgerung hinsichtlich der lichtschwingenden Geschwindigkeit der Serienelektronen zuließe. Es ist indes doch möglich auf Grund folgender Überlegung. Der Lorentz-Voigtschen Theorie des Zeemaneffektes liegt die Voraussetzung zugrunde, daß die rücktreibende Kraft auf die Serienelektronen mit und ohne Magnetfeld quasielastisch sei. Nun hat indes bereits W. Voigt[1]) darauf hingewiesen, daß, wenn die rücktreibende Kraft auf die lichtschwingenden Elektronen auch für größere Deformationen quasielastisch bleibt, keine Frequenzänderung der Serienlinien durch ein elektrisches Feld möglich ist. Da indes in Wirklichkeit der Effekt des elektrischen Feldes wenigstens angenähert der Feldstärke proportional und für eine Feldstärke von $2 \cdot 10^{-1}$ stat. Einh. ungefähr gleich einem Zehntel des Zeemaneffektes für 30000 Gauß ist, so kann die rücktreibende Kraft gegenüber einer derartigen äußeren Kraft nicht mehr im quasielastischen Deformationsbereich sich befinden.

Besäße also die Lorentzsche Kraft $e\left[\mathfrak{H}\frac{v_e}{c}\right]$ für ein Feld von 30000 Gauß die Größenordnung der elektrischen Kraft $e\mathfrak{E}$ in einem Feld von $2 \cdot 10^{-1}$ stat. Einh., so könnten sich keine scharfen Zeemankomponenten in Übereinstimmung mit der Theorie beobachten lassen. Da dies jedoch der Fall ist, so muß die lichtschwingende Geschwindigkeit der Serienelektronen $v_e < \frac{\mathfrak{E}c}{\mathfrak{H}}$, also kleiner als $2 \cdot 10^8$ cm sec^{-1} sein. Hieraus ist weiter zu folgern, daß die Amplitude der lichtschwingenden Serienelektronen im Zeemaneffekt für eine Wellenlänge von $6 \cdot 10^{-5}$ cm kleiner als $1 \cdot 10^{-10}$ cm ist.

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. **4**, 197, 1901; Magneto- und Elektrooptik, B. G. Teubner, Leipzig 1908, § 220.

Aachen, Physik. Institut der Technischen Hochschule, 9. Februar 1914.

(Eingegangen 10./23. Februar 1914.)

Über die Abhängigkeit der Fluoreszenz von der Konzentration.

Von Werner Mecklenburg und Siegfried Valentiner.

Die überaus zahlreichen experimentellen Untersuchungen über die Fluoreszenz von Lösungen kann man vielleicht zweckmäßig in zwei große Gruppen teilen. In der einen handelt es sich um Untersuchungen über den Charakter der Fluoreszenzspektren und die zur Erregung notwendige Lichtart; es gehören hierher die vielen zum Teil sehr unfruchtbaren und rein qualitativen Arbeiten über das Stokessche Gesetz, ferner die wichtigen neuen Veröffentlichungen von Nichols und Merritt über die Abhängigkeit der Erregung von der Wellenlänge des erregenden Lichts und von Rich. Meyer und von Joh. Stark und seinen Mitarbeitern über den Zusammenhang von Absorptions- und Fluoreszenzbanden. Zu der zweiten Gruppe muß man die Untersuchungen über den Einfluß des Lösungsmittels und der Konzentration auf die Farbe und Intensität der Fluoreszenz rechnen. Da alle diese Arbeiten im Grunde ein und dasselbe große Problem zu fördern streben, nämlich den Zusammenhang zwischen Fluoreszenz und chemischer Konstitution und physikalischer Beschaffenheit der Moleküle aufzudecken, so sind die Gruppen natürlich eng miteinander verbunden und greifen auch wohl hier und da ineinander über. Wesentliche Erfolge für die Entwicklung der Theorie der Fluoreszenzerscheinungen haben eigentlich bisher nur Arbeiten der 1. Gruppe erzielt, und das liegt in erster Linie daran, daß die Arbeiten der 2. Gruppe fast durchweg rein qualitativer Natur gewesen sind, während gerade der Wert von Arbeiten dieser Gruppe für die Lösung des Problems zweifellos nur in sorgfältiger, quantitativer Ausführung liegen kann.

Wir haben uns die Aufgabe gestellt, in dieser Richtung hin zu versuchen, die Kenntnis der Fluoreszenz in Lösungen zu erweitern und möchten im folgenden eine Reihe quantitativer Messungen der Helligkeit von Fluoreszeinlösungen verschiedener Konzentration mitteilen, Messungen, die an anderen Lösungen fortgesetzt werden sollen. Die gewonnenen Resultate zeigen, daß in der Tat durch solche Messungen eine Förderung der Theorie der Fluoreszenzerscheinungen gewonnen werden kann.

I. Meßapparat.

Wir haben die Helligkeit der Fluoreszenz von Lösungen verschiedener Fluoreszeinpräparate mittels eines von uns konstruierten, in der

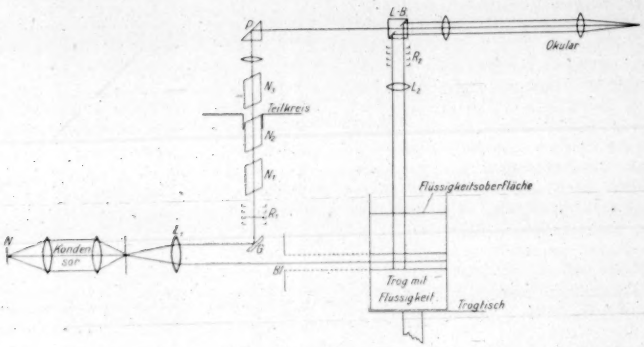


Fig. 1.

Zeitschr. f. Instrumentenkunde ausführlich beschriebenen Photometers mit der Helligkeit des erregenden Lichts (eines Nernstglühstiftes) verglichen[1]).

Das Prinzip des Apparats geht aus der obenstehenden schematischen Zeichnung (Fig. 1) hervor. Ein von der Nernstlampe N ausgehendes Lichtbündel tritt aus Linse L_1 parallel aus und dient einerseits zur Beleuchtung der weißen Gipsplatte G und andrerseits zur Erzeugung des Fluoreszenzstreifens von 1 cm² Querschnitt in der Flüssigkeit, die in einem Trog hinter der Blende Bl von quadratischem Querschnitt und von 1 cm Seitenlänge sich befindet. Der Trog steht in eindeutig definierter Weise auf einer mit dem Photometer fest verbundenen Tischplatte, die meßbar gehoben und in Richtung des einfallenden Lichtbündels verschoben werden kann. Zum Schutz gegen fremdes Licht ist Trog und Trogtisch in einem lichtdichten Kasten mit den zur Beobachtung nötigen Öffnungen eingeschlossen. Ein Teil des Fluoreszenzstreifens wird durch die Linse L_2 mit einer zum Streifen senkrechten Achse auf dem versilberten Teil des Lummer-Brodhunwürfels LB abgebildet. Der nicht versilberte Teil wird von der Gipsplatte G beleuchtet, von der das Licht durch ein System von 3 Nicols, N_1, N_2, N_3, durch eine Linse und ein totalreflektierendes Prisma P ebenfalls zu LB gelangt. Die beiden äußeren der 3 Nicols sind fest und haben gleiche Polarisationsrichtung, der mittlere N_2 ist drehbar und wird so eingestellt, daß die verschiedenen Flächenstücke des LB gleiche Helligkeit zeigen. Wird der Winkel φ, der bei dieser Einstellung am Index abgelesen werden kann, von der Stellung gekreuzter Polarisationsrichtungen als Nullstellung an gezählt, so ist die Helligkeit des auf der Versilberung von dem Photometerwürfel abgebildeten Fluoreszenzstreifenstückes proportional dem $\sin^4 \varphi$-fachen der Gipshelligkeit, und somit auch proportional dem $\sin^4 \varphi$-fachen der Helligkeit des in die Flüssigkeit eintretenden, den Fluoreszenzstreifen erzeugenden Lichtbündels. Da Fluoreszeinlösungen grün fluoreszieren, haben wir zwischen Gipsplatte und Nicols bei R_1 eine grüne Glasplatte geschaltet, um farbige Photometrie zu vermeiden.

Die für die vorliegende Untersuchung wichtigsten Punkte der ganzen Anordnung sind folgende drei. 1. Beobachtung des Fluoreszenzstreifens senkrecht zum Streifen[1]). 2. Vergleichung der Fluoreszenzintensität mit der Helligkeit des erregenden Lichts; dadurch sind Fehler infolge von Schwankungen des erregenden Lichts während der Messungen ausgeschlossen[2]). 3. Die Möglichkeit, durch Ver-

1) Der Apparat ist von Franz Schmidt & Haensch, Berlin, angefertigt und durch D.R.G.M. geschützt worden. Ein ähnlicher Apparat wurde von Kamerlingh Onnes und Keesom (Comm. of Leiden, Nr. 104b) für Opaleszenzmessungen in der Nähe des kritischen Punktes 1908 benutzt, wie uns leider erst nach Ausarbeitung unseres Photometers 1910 bekannt geworden ist.

1) Die Vorteile dieser Beobachtungsrichtung siehe Zeitschr. f. Instrumentenkunde.

2) Knoblauch hat nachgewiesen, daß die Intensität des Fluoreszenzlichts und die des erregenden Lichts in weiten Grenzen proportional sind (Wied. Ann. **54**, 198, 1895). Wir selbst hatten im Verlauf unserer Untersuchung auch oft Gelegenheit, diese Proportionalität zu beobachten.

schieben[1]) des Troges an verschiedenen Stellen der Lösung den Fluoreszenzstreifen zu erzeugen und zu messen; dadurch gelingt es, die Absorption und Zerstreuung des erregenden Lichts und des Fluoreszenzlichts in der Flüssigkeit zu bestimmen und ihren Einfluß auf die gemessene Helligkeit zu eliminieren[2]).

Was die Genauigkeit unserer Helligkeitsmessungen anlangt, so entspricht sie der, die bei anderen photometrischen Messungen bei Benutzung von Nicolschen Prismen zu erreichen ist. Bei sehr geringen Helligkeiten läßt sie etwas zu wünschen übrig, wie das auch bei anderen photometrischen Messungen der Fall ist; bei mittlerer Helligkeit wird aber der Fehler des Resultats 2 Proz. nicht überschreiten. Zur Erhöhung der Genauigkeit stellte jeder von uns in jedem der vier Quadranten den drehbaren Nicol auf gleiche Helligkeit der Flächenstücke ein und nahmen wir aus den 8 Ablesungen nach Reduktion auf den 1. Quadranten das Mittel. Da die Farbe des durch die grüne Glasplatte gedrungenen Lichts mit der der Fluoreszenz nicht vollständig, wenn auch sehr nahe übereinstimmte, und da unsere Augen für diese Farben verschieden empfindlich waren, wich das Mittel der Beobachtungen des einen von uns stets um einen relativ gleichen Betrag von dem der Beobachtungen des anderen ab, ein Umstand, der die Genauigkeit der relativen Helligkeitsmessungen natürlich nicht beeinträchtigen kann.

II. Versuche.

1. Voruntersuchung über die Helligkeit wäßriger Fluoreszeinlösungen und den Einfluß von Alkalizusatz auf dieselbe.

Für unsere Untersuchung stellten wir uns eine größere Quantität einer alkoholischen Fluoreszeinlösung her. Es wurden 5,000 g eines uns von Herrn Privatdozenten Dr. Wilhelm Schneider in Jena freundlichst zur Verfügung gestellten, besonders reinen Präparats von Fluoreszein in 1000 ccm käuflichen absoluten Alkohols gelöst. Wenn man von einer solchen „Stammlösung" z. B. 5 ccm mit destilliertem Wasser auf 500 ccm verdünnt, so erhält man trotz der großen Verdünnung — 50 mg Fluoreszein im Liter — keine echte, sondern eine typisch kolloidale Lösung. Es zeigte sich daher, daß man je nach der Art, wie die alkoholische Fluoreszeinlösung zum Wasser zugegeben wurde — sei es unter dauerndem Umrühren, sei es durch vorsichtiges Aufschichten auf das Wasser und nachträgliches Umrühren — Lösungen erhält, die schon bei der Betrachtung im auffallenden Tageslicht sehr verschieden getrübt erscheinen. Diese Unterschiede bleiben, wenn man die Lösungen sich selbst überläßt, wochenlang bestehen, während sich gleichzeitig am Boden der Flüssigkeit als Zeichen der Übersättigung deutlich erkennbare Kristalle von Fluoreszein absetzen. Die Untersuchung im Photometer bestätigte den Augenschein und ergab, daß auch bei viel stärkeren Verdünnungen als der oben beispielsweise genannten analoge Erscheinungen auftreten, so daß diese Lösungen in bezug auf ihre „Fluoreszenzhelligkeit" nicht reproduzierbar sind. Es zeigte sich bei näherer Prüfung auch, daß das als Fluoreszenzlicht im Photometer gemessene Licht ein Gemisch von echtem Fluoreszenzlicht und solchem Licht (Tyndalllicht) ist, das durch Reflexion und Beugung an den in der Flüssigkeit suspendierten, größeren Fluoreszeinkomplexen entsteht. Die Farbe des in die Fluoreszeinlösung eindringenden, senkrecht zum Strahlengang beobachteten Lichts, die bei echten Fluoreszeinlösungen ausgesprochen grün ist, zeigt einen rötlich-gelben Ton, wie man ihn an konzentrierteren, kolloidalen, wäßrigen Fluoreszeinlösungen im auffallenden Licht bemerken kann.

Setzt man zu einer derartigen kolloidalen Lösung tropfenweise eine sehr verdünnte Lösung eines Alkalis, z. B. von Ammoniak, von Kalilauge oder von Soda hinzu, so nimmt die im Photometer gemessene Helligkeit des Lichtbündels ungefähr proportional der Menge des zugesetzten Alkalis zu, indem gleichzeitig die Farbe mehr und mehr den rötlich-gelben Ton verliert und in das Grün der reinen Fluoreszenz von Fluoreszein übergeht. In Tabelle 1 ist eine Messungsreihe mitgeteilt, die die Helligkeitsänderung durch Alkalizusatz erkennen läßt. In diesem Beispiel war die Fluoreszeinkonzentration 1 μg pro Kubikzentimeter und die tropfenweise zugesetzte Ammoniaklösung ungefähr 0,002 normal. Die Menge der Fluoreszeinlösung, der die Ammoniaklösung zugefügt wurde, betrug 500 ccm, war also groß genug, um die durch den Ammoniakzusatz hervorgerufene Verdünnung vernachlässigen zu können. Der Trog, in dem sich die Lösung befand, wurde immer in gleicher Weise auf den Tisch im Innern des Photometers gesetzt und der Tisch wurde in Höhe und horizontaler Lage unverändert gelassen, so daß bei der ganzen Messungsreihe immer ein Stück des Fluoreszenzstreifens photometriert wurde, welches in derselben Entfer-

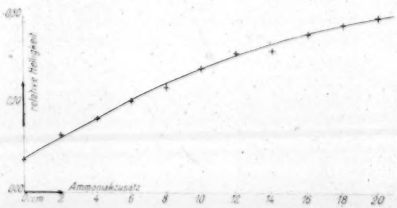
1) Mittels der Bewegungsvorrichtung des Trogtisches.
2) Bei Vernachlässigung dieses besonders bei höheren Konzentrationen bedeutenden Einflusses ist nicht zu erwarten, daß die Resultate einfache Gesetzmäßigkeit zeigen.

Tabelle 1.

Helligkeitsänderung durch Ammoniakzusatz.

Ammoniakzusatz	relative Helligkeit
0 ccm	0,137
2	0,165
4	0,184
6	0,204
8	0,220
10	0,241
12	0,259
14	0,262
16	0,281
18	0,290
20	0,299
520[1])	0,321

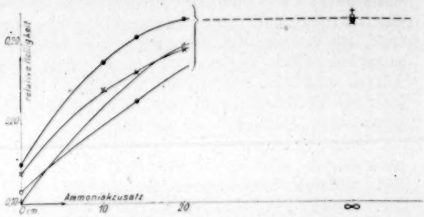
nung e[2]) von der Eintrittsstelle des erregenden Lichts und in derselben Entfernung h von der Oberfläche der Flüssigkeit sich befand. In der nach Tabelle 1 gezeichneten graphischen Darstellung (Fig. 2) ist als Abszisse der Ammoniakzusatz der 0,002 normalen Lösung in Kubikzentimetern angegeben, als Ordinate die relative Helligkeit $= \sin^4 \varphi$.



Helligkeitsänderung durch Ammoniakzusatz.

Fig. 2.

Da die bei dieser Messungsreihe als Ausgangsmaterial dienende wäßrige kolloidale Fluoreszeinlösung, wie wir sahen, nicht genau reproduzierbar ist, so wird es nicht wundernehmen, daß auch die ganze Kurve in Fig. 2 bei Wiederholungen mit Fluoreszeinlösungen gleicher Konzentration nicht genau wieder erhalten werden konnte. Die graphische Darstellung Fig. 3 gibt ein Bild der Abweichungen der mit Lösungen gleicher Fluoreszeinkonzentration gewonnenen Kurven. Wie die Darstellung aber



Reproduzierbarkeit der Endwerte bei Alkalizusatz.

Fig. 3.

zeigt, laufen sie alle zusammen in ein zur Abszissenachse paralleles Endstück, so daß es den Anschein hat, daß die Lösungen bei Zusatz einer gewissen Menge Ammoniak bezüglich ihrer Fluoreszenzhelligkeit reproduzierbar werden und daß ein weiterer Zusatz keinen Einfluß auf die Helligkeit mehr hat. Die Erklärung hierfür ist leicht zu geben: Es beruht die Einwirkung des Alkalis auf das Fluoreszein als eine schwache Säure auf einer Salzbildung; die Alkalisalze des Fluoreszeins sind — im Gegensatz zu der freien Säure — in Wasser leicht löslich; durch den Alkalizusatz wird also, wenn er groß genug ist, die kolloidale Fluoreszenzlösung in eine echte Fluoreszeinatlösung übergeführt, und somit die nicht reproduzierbare Lösung in eine reproduzierbare. Von Interesse ist es, zu bemerken, daß das durch Zusatz von Ammoniak gewonnene Helligkeitsmaximum der Fluoreszenz auch durch jedes andere Alkali in der gleichen Höhe gewonnen werden kann, konstante Temperatur und gleiche Fluoreszeinkonzentration vorausgesetzt. Tabelle 2, in der diese Maxima (oder Endwerte) angegeben sind, zeigt die befriedigende Übereinstimmung.

In Anbetracht dieser Beobachtungen haben wir für unsere weiteren Untersuchungen nur „mit Alkali gesättigte" Fluoreszeinlösungen benutzt; d. h. Lösungen, deren Fluoreszenz durch

Tabelle 2.

Helligkeitsendwerte bei Zusatz verschiedener Alkalien.

a) Fluoreszeinkonzentration 0,85 μg/ccm.

Alkali	Helligkeit der Fluoreszenz in der Entfernung	
	$e = 7{,}6$ mm	$e = 32{,}6$ mm
Na_2CO_3 . . .	0,370	0,167
$(NH_4)_2CO_3$ . .	0,357	0,152
KOH	0,386	0,158
NH_3	0,376	0,158
Mittel:	0,372	0,159

1) Um eine große Verdünnung der Fluoreszeinlösung zu vermeiden, wurde an Stelle von 500 ccm der 0,002 norm. Ammoniaklösung 5 ccm einer 100 mal so konzentrierten Lösung zugegeben.

2) Gemessen von der Innenfläche der Trogwand, durch die das erregende Licht eintritt.

b) Fluoreszeinkonzentration 5 μg/ccm.

Alkali	Helligkeit der Fluoreszenz in der Entfernung	
	$e = 17{,}6$ mm	$e = 32{,}6$ mm
$NaOH$. . . .	0,384	0,161
K_2CO_3. . . .	0,388	0,153
Na_2CO_3 . . .	0,386	0,160
$(NH_4)_2CO_3$ . .	0,379	0,163
Mittel:	0,384	0,159

Hinzufügung von weiterem Alkali nicht mehr erhöht wird.

2. Abhängigkeit der Fluoreszenzhelligkeit von der Konzentration der wäßrigen Fluoreszeinlösungen.

Zunächst war es von Wichtigkeit festzustellen, ob die als „rein" in den Handel gebrachten Fluoreszeinpräparate verschiedener Herkunft bei gleicher Konzentration dieselbe Fluoreszenzhelligkeit zeigen. Wir verglichen daher Lösungen von der Konzentration 0,5 μg im Kubikzentimeter, die in gleicher Weise aus Präparaten von Merck, von Kahlbaum, von König & Co., von Schuchardt, von Dietz & Richter und von Dr. Schneider hergestellt waren, untereinander; sie ergaben, bald nach der Herstellung gemessen[1]), innerhalb der Fehlergrenzen gleiche Helligkeiten, bis auf das Schneidersche Präparat mit einer ungefähr 10 Proz. geringeren Helligkeit; dasselbe Resultat fanden wir beim Vergleich der Lösungen von der zehnfachen Konzentration (vgl. Tabelle 3).

Tabelle 3.

Fluoreszenzhelligkeit von Fluoreszeinlösungen verschiedener Herkunft.

Präparat	Konzentration	
	0,5 μg/ccm	5,0 μg ccm
Merck	0,240	0,363
Kahlbaum . . .	0,226	0,361
König & Co. . .	0,233	0,367
Schuchardt . . .	0,236	0,365
Dietz & Richter .	0,233	0,368
Mittel:	$0{,}232 + 0{,}008$	$0{,}365 + 0{,}004$
Schneider . . .	0,213	0,349

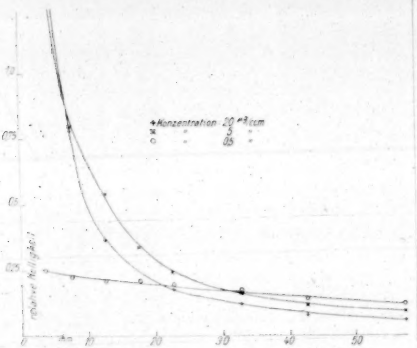
Was nun die Frage nach der Abhängigkeit der Fluoreszenzhelligkeit von der Konzentration anlangt, so ist klar, daß es sich hier nur um den Vergleich von Fluoreszenzhelligkeiten handeln kann, die von derselben Intensität des erregenden Lichts an der Stelle der Erregung hervorgerufen wird. Die Helligkeitsmessungen mit unserem Photometer geben nun nicht direkt diese Werte, vielmehr sind sie modifiziert dadurch, daß das erregende Licht in der Flüssigkeit auf dem Wege vom Eintritt in die Flüssigkeit bis zu der photometrierten Stelle im Fluoreszenzstreifen geschwächt wird, und dadurch, daß das Fluoreszenzlicht selbst in der über dem Streifen befindlichen Flüssigkeitsschicht ebenfalls Absorption erleidet.

Von der Berücksichtigung des letzteren Einflusses haben wir in den meisten Fällen ganz absehen können; die Untersuchung ergab nämlich, daß in den verdünnteren, von uns benutzten Lösungen die Absorption des Fluoreszenzlichts in der Flüssigkeit bei geringer Schichtdicke kaum bemerkbar ist und selbst in der verhältnismäßig konzentrierten Lösung von 25 μg Fluoreszein im Kubikzentimeter die Helligkeit des Fluoreszenzlichts bei dem Durchgang durch eine Flüssigkeitsschicht von 3 cm um nur ca. 20 Proz. geschwächt wird. Die Schwächung in der über dem Fluoreszenzstreifen liegenden Flüssigkeitsschicht ist durch Beobachtungen der Fluoreszenzhelligkeit mit verschieden dicken, darüber liegenden Schichten leicht zu bestimmen und die Elimination auszuführen. Da wir den Trogtisch meßbar heben und senken können, kann die Änderung der Schichtdicke in gewünschter Weise bequem vorgenommen werden.

Von viel größerer Bedeutung ist die Absorption des erregenden Lichts in der Flüssigkeit. Die Intensität desselben nimmt in der Tat selbst in Lösungen geringer Konzentration stark ab und mit ihr natürlich die Erregung zur Fluoreszenz. Unter der Voraussetzung, daß die Erregung der Intensität proportional ist[1]), können wir den Abfall, also auch die Absorption des erregenden Lichts, durch Messung der Fluoreszenzhelligkeit an Stellen des Streifens, die sich in verschiedenen Entfernungen e von der Eintrittsstelle befinden, bestimmen und können weiter aus diesen Beobachtungen auf die uns interessierende Fluoreszenzhelligkeit schließen, die von dem noch nicht geschwächten Licht erregt werden würde, mit dem in unserem Apparat ja die Fluoreszenzhelligkeit verglichen wird. Von dem Abfall der Fluoreszenzhelligkeit mit wachsendem e in drei Fluoreszeinlösungen verschiedener Konzentration gibt die Tabelle 4 und die dazu gehörige graphische Darstellung (Fig. 4) ein anschauliches Bild.

1) Bei wochenlangem Stehen am Tageslicht nimmt die Fluoreszenzhelligkeit der wäßrigen, mit Alkali versetzten Fluoreszeinlösungen übrigens ganz bedeutend ab.

1) Vgl. Anm. 2 auf S. 268.



Abfall der Fluoreszenzhelligkeit mit wachsendem e.

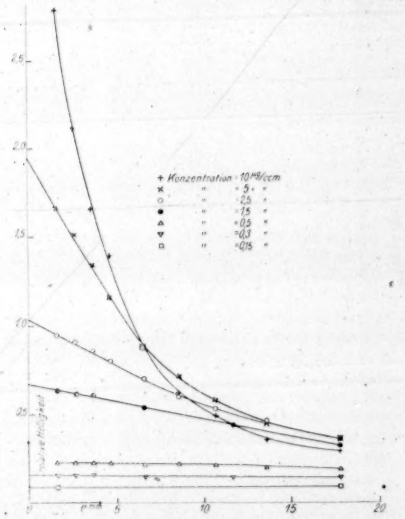
Fig. 4.

Tabelle 4.

Abfall der Fluoreszenzhelligkeit mit wachsender Entfernung e

e	Helligkeit der Lösung von der Konzentration		
	$c = 20{,}0\ \mu g$ ccm	5,0	0,5
2,6 mm	3,69 [1]	—	—
3,6	—	1,665 [1]	0,250
7,6	0,780	0,705	0,228
12,6	0,361	0,535	0,210
17,6	—	0,338	0,204
22,6	0,174	0,243	0,188
32,6	0,120	0,158	0,167
42,6	0,080	0,115	0,141
57,6	0,055	0,090	0,121

Zur Ableitung des gesuchten Wertes der Fluoreszenzhelligkeit (Wegstrecke des erregenden Lichts $e = 0$) in Lösungen verschiedener Konzentration verfuhren wir nun folgendermaßen. Wir bestimmten den Abfall der In-



Abfall der Fluoreszenzhelligkeit mit wachsendem e in der Nähe von $e = 0$.

Fig. 5.

Tabelle 5 [2].

Abfall der Fluoreszenzhelligkeit mit wachsender Entfernung e

e	Helligkeit der Lösung von der Konzentration						
	10 μg/ccm	5	2,5	1,5	0,5	0,3	0,15
1,6 mm	2,79	1,66	0,95	0,64	0,228	0,157	0,0856
2,6	2,11	1,51	0,91	0,62	0,229	0,157	0,0889
3,6	1,65	1,34	0,86	0,61	0,229	0,163	0,0889
4,6	1,30	1,16	0,80	—	0,223	—	—
6,6	0,88	0,88	0,70	0,54	0,212	0,146	0,0904
8,6	0,62	0,71	0,60	—	0,213	—	—
10,6	0,49	0,58	0,53	—	0,213	—	—
11,6	—	—	—	0,44	—	0,140	0,0885
13,6	0,36	0,45	0,46	—	0,196	—	0,0885
17,6	0,29	0,36	0,36	0,32	0,187	0,136	—

Helligkeit der Lösungen niedrigerer Konzentration unabhängig von e bei:

0,10 μg ccm	0,05	0,02	0,01
0,0656	0,0364	0,0157	0,0077

1) Die Helligkeit des Fluoreszenzlichtes war so groß, daß auf gleiche Helligkeit der Flächenstücke des Lummer-Brodhun-Würfels mittels des drehbaren Nicols nur eingestellt werden konnte, nachdem bei R_2 (vgl. Fig. 1) zwischen die Linse L_2 und LB zwei Schwärzungsplatten von bekanntem Schwächungskoeffizienten eingeschoben waren.

2) Bei den hier mitgeteilten Messungen wurde ein anderer Flüssigkeitsglastrog benutzt als bei den in Tabelle 4 aufgenommenen.

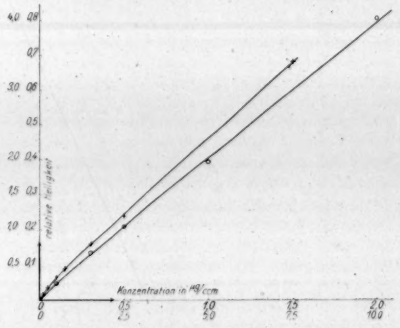
tensität mit besonderer Sorgfalt im ersten Teil der Strecke e bis dicht an $e=0$ heran — die Beobachtungen sind in Tabelle 5 und der graphischen Darstellung (Fig. 5) wiedergegeben — und extrapolierten graphisch auf die Intensität für $e=0$ (Tabelle 6). Für Lösungen geringer Konzentration ist dieses Verfahren, wie aus der graphischen Darstellung hervorgeht, offenbar erlaubt und muß auch auf zuverlässige Werte führen; bei höheren Konzentrationen (10 μg und 5 μg pro ccm) sind die Werte allerdings mit größerer Unsicherheit behaftet.

Tabelle 6.

Auf $e=0$ extrapolierte Fluoreszenzhelligkeiten verschiedener Konzentrationen.

Konzentration	Helligkeit
10 μg/ccm	ca. 4,0
5	1,95
2,5	1,04
1,5	0,67
0,5	0,238
0,3	0,158
0,15	0,089
0,10	0,066
0,05	0,036
0,02	0,0157
0,01	0,0077

Aus der Darstellung (Fig. 6), in der als Abszissen die Konzentrationen (μg im ccm) aufgetragen sind, als Ordinaten die so gewonnenen gesuchten, für diese Konzentrationen charakteristischen Fluoreszenzhelligkeiten, ergibt sich, daß zwischen Helligkeit und Konzentration sogar bei den hier untersuchten geringen Konzentrationen wahrscheinlich nur angenähert Proportionalität besteht. Es scheint eine systematische Abweichung von der Proportionalität vorhanden zu sein, die darauf hindeutet, daß bei höheren Konzentrationen die Helligkeit langsamer zunimmt, als der Proportionalität entspricht. Ob das wirklich der Fall ist, kann erst durch weitere Messungen mit völliger Sicherheit entschieden werden. (Der größeren Deutlichkeit wegen sind in Fig. 6 die Beobachtungen an geringen Konzentrationen (0,01 bis 1,5 μg/ccm) durch + im fünffachen Maßstab eingezeichnet.)



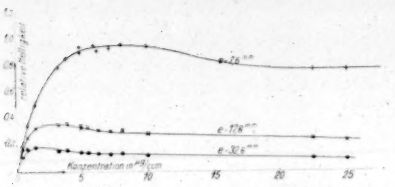
Abhängigkeit der Fluoreszenzintensität von der Konzentration.
Es gilt: für o einfacher Maßstab (äußere Zahlen),
„ + fünffacher Maßstab (innere Zahlen).

Fig. 6.

Auf die, wie es scheint, immerhin einfache Gesetzmäßigkeit zwischen Fluoreszenzhelligkeit und Konzentration konnten wir nur geführt werden durch Beziehung der Fluoreszenzhelligkeit auf die Intensität des erregenden Lichts. Wie kompliziert die Verhältnisse werden, wenn man auf die Absorption des erregenden Lichts keine Rücksicht nimmt und also die Helligkeiten der Fluoreszenz in Lösungen verschiedener Konzentration an gleichen Stellen der Lösungen miteinander vergleicht, oder wie es früher meist geschehen ist, die Fluoreszenzhelligkeit im auffallenden Licht mißt, zu der je nach der Absorption mehr oder weniger dicke Schichten beitragen, erkennt man leicht aus den Darstellungen Fig. 4 und 5. Ein Blick auf die Diagramme und die sich schneidenden Kurven, deren jede einer bestimmten Konzentration entspricht, zeigt, daß z. B. eine Lösung, die infolge hoher Konzentration unmittelbar hinter der Eintrittsstelle (bei sehr kleinem e) stärker als eine zweite Lösung geringerer Konzentration fluoresziert, in etwas größerer Entfernung von der Eintrittsstelle weniger intensiv leuchtet. So fluoresziert (s. Fig. 5) die 10 μg-Lösung innerhalb der ersten 6 mm stärker als die 5 μg-Lösung; in der Entfernung 6,6 mm fluoreszieren beide Lösungen gleich stark und in größerer Entfernung übertrifft die Helligkeit der 5 μg-Lösung die der 10 μg-Lösung.

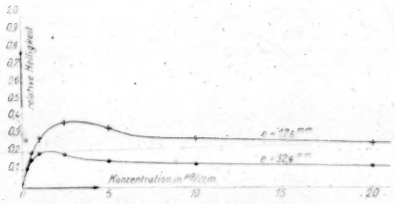
Photometriert man also die gleiche Stelle von Lösungen verschiedener Konzentration, so wird man zunächst mit wachsender Konzentration zunehmende Fluoreszenzhelligkeit konstatieren können. Nach Überschreiten einer gewissen, durch die Entfernung e bestimmten Konzentration wird infolge des überwiegenden Einflusses der Absorption die Helligkeit bei wachsender Konzentration abnehmen. Die Diagramme Fig. 7a und 7b zeigen übersichtlich diese Änderung der Helligkeit mit der Konzentration bei konstantem e; die verschiedenen Kurven beziehen sich auf verschiedene Werte von e.

Zum Schluß müssen wir noch auf einen



Änderung der Helligkeit mit der Konzentration bei konstantem ε. (Präparat von Schneider.)

Fig. 7a.



Änderung der Helligkeit mit der Konzentration bei konstantem ε. (Präparat von Merck.)

Fig. 7b.

Punkt hinweisen, der weiter untersucht werden soll, nämlich die Beobachtung, daß der in der angegebenen Weise gemessene Abfall des erregenden Lichts in der Flüssigkeit viel stärker ist als nach der Größe des Absorptionskoeffizienten zu erwarten ist, den wir auf bekannte Weise mit einem Spektralphotometer nach König-Martens und einem Schulzeschen Glaskörper für die verschiedenen Spektralbereiche gefunden haben. Es ist nicht unmöglich, daß diese Beobachtung in Zusammenhang steht mit den eigentümlichen Resultaten, die Nichols und Merritt[1]) gefunden haben, denen zufolge eine fluoreszenzfähige Lösung stärker absorbieren soll, wenn sie fluoresziert, als wenn sie nicht fluoresziert.

III. Zusammenfassung.

Als hauptsächlichste Resultate der vorliegenden Arbeit möchten wir nennen:

1. Reproduzierbarkeit der Fluoreszenzhelligkeit einer wäßrigen Fluoreszeinlösung und ihre Unabhängigkeit vom Alkaligehalt, sobald eine Minimalmenge Alkali der Lösung zugesetzt ist.

2. Angenäherte Proportionalität zwischen Fluoreszenzhelligkeit und Konzentration wäßriger, mit Alkali versetzter Fluoreszeinlösungen bis zu Konzentrationen von 10 μg im Kubikzentimeter.

Die Untersuchung soll zunächst an rein alkoholischen Fluoreszeinlösungen fortgesetzt werden.

Clausthal, Januar 1914. Phys. Inst. d. Kgl. Bergakademie.

(Eingegangen 4. Februar 1914.)

1) Vgl. Nichols, Jahrb. f. Rad. u. Elektr. **2**, 149 ff. (spez. 175).

Das Nachglühen der elektrischen Entladungen in Gemischen von Stickstoff mit Sauerstoff.
(The Afterglow of Electric Discharge in Mixtures of Nitrogen with Oxygen).

Von R. J. Strutt.

Während der letzten Jahre habe ich eine Anzahl von Arbeiten über eine durch die elektrische Entladung erzeugte aktive Modifikation des Stickstoffs (An Active Modification of Nitrogen produced by the Electric Discharge) veröffentlicht[1]). Diese Veröffentlichungen haben die Aufmerksamkeit einer Anzahl anderer Verfasser erregt, die sich über sie ausgelassen haben[2]) und in ihren Ansichten in manchen Punkten von den Schlußfolgerungen abweichen, zu denen ich gelangt bin. Ich erachte keine dieser Kritiken für wohl begründet, will aber hier nicht weiter auf sie antworten, als dies schon geschehen ist. Es ist wünschenswert, zu Nutz und Frommen der deutschen Leser hier die Ergebnisse einer früheren Untersuchung zusammenzufassen, die in den Proc. Phys. Soc. London **23**, 1910 und **24**, 1911 ausführlich veröffentlicht worden sind. Eine Kenntnis dieser Untersuchung wird bei der Besprechung des verwandten Gegenstandes, des aktiven Stickstoffs, die Klarheit fördern.

Bereits in der Anfangszeit der Vakuumröhren hat man beobachtet, daß in Gasen, die Sauerstoff enthielten, zuweilen ein Nachleuchten zu sehen war. Mir scheint keine der Untersuchungen über diesen Effekt dessen Natur wirklich aufgeklärt zu haben. Ich habe ihn nach einem Verfahren untersucht, das zuerst von Dewar[3]) eingeführt worden ist. Man verwendet dabei eine leistungsfähige Luftpumpe, um einen regulierbaren Gasstrom durch die

1) Proc. Roy. Soc. (A) **85**, 219, 1911 und folgende Bände.

2) F. Comte, diese Zeitschr. **14**, 74, 1913; A. König und E. Elöd, diese Zeitschr. **14**, 165, 1913; R. J. Strutt, diese Zeitschr. **14**, 215, 1913; E. Tiede, Chem. Ber. 1913, S. 340; E. Tiede und E. Domcke, Chem. Ber. 1914, S. 4095.

3) Proc. Roy. Inst. London, 1888.

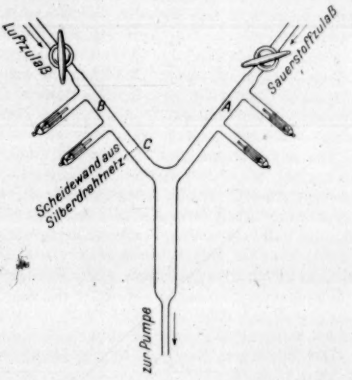
Vakuumröhre zu saugen. Auf diese Weise bewirkt man eine fortlaufende Erneuerung des aus dem Gebiete der Entladung stammenden Gases und kann das Nachglühen, das dieses Gas beim Durchgang durch ein anderes Gefäß auf seinem Wege zur Pumpe aussendet, dauernd und mit Muße untersuchen. Die bei dieser Untersuchung benutzte Entladung war einfach die Entladung eines Induktors ohne Leidener Flasche. Darüber, ob reiner Sauerstoff ein Leuchten zeigt oder nicht, sind die Meinungen erheblich auseinandergegangen. Wenn der Sauerstoff vollkommen trocken und frei von Stickstoff war, fand ich überhaupt kein Glühen. Bei Luft dagegen erhielt ich ein helles, gelblich-grünes Glühen, das durch Anreicherung der Luft mit Sauerstoff verbessert wurde. Die beste Wirkung erreichte ich bei einem erheblichen Überschuß an Sauerstoff.

Verschiedene frühere Forscher haben das Glühen mit Ozon in Zusammenhang gebracht. Ich bin zu demselben Schlusse gelangt. Die Gründe dafür waren folgende:

1. Die Röhre, durch die das glühende Gas geleitet wurde, wurde auf 300° C erhitzt. Das Glühen verlosch. Die Hitze zerstört auch das Ozon.
2. Das Glühen wird durch Durchleiten durch eine in flüssiger Luft gekühlte Röhre unterbrochen. Ozon ist bei der Temperatur der flüssigen Luft kondensierbar.
3. Das Glühen wird durch Kupferoxyd und durch Manganoxyd vernichtet. Ozon wird gleichfalls durch diese Stoffe zerstört.
4. Eine Scheidewand aus Silberdrahtnetz (in nur einer einzigen Lage) wird in dem Glühen oxydiert, und das auf diese Weise oxydierte Netz vernichtet das Nachglühen der hindurchgehenden Luft vollständig. Bekanntlich wird Ozon bei der Berührung mit oxydiertem Silber zerstört.
5. Mit Thalliumhydroxyd getränktes Papier wird durch das in dem glühenden Gase enthaltene Ozon rasch gebräunt. Außerhalb der Grenzen des Glühens wird das Papier nicht beeinflußt.

Die bisher mitgeteilten Versuche zeigten, daß mit dem Glühen eine Verzehrung von Ozon verbunden ist. Es ist daher naturgemäß, das Glühen als eine aus der Oxydation irgendeines anderen Körpers durch Sauerstoff entstehende Flamme anzusehen. Die nächstfolgenden Versuche waren darauf gerichtet, die Natur dieses anderen Körpers zu bestimmen. Ich erzeugte Ozon in einer Vakuumröhre, durch die ich einen Strom von sehr trockenem verdünntem Sauerstoff schickte, der an sich kein Nachglühen erzeugte. Das auf diese Weise erzeugte Ozon ließ ich sich auf seinem Wege zur Pumpe in einer Y-förmigen Röhre mit irgendeinem anderen Gase vermischen, das ich zu untersuchen wünschte.

Dem zweiten Arm der Y-förmigen Röhre (siehe die Figur) führte ich einen Luftstrom zu,



der durch eine zweite Entladungsröhre B hindurchgegangen war. Diese Röhre B war von der erstgenannten Röhre A, in der das Ozon erzeugt wurde, gänzlich unabhängig. Der aus B kommende Luftstrom wurde durch eine Scheidewand C aus Silberdrahtnetz seines Glühens beraubt, ehe er mit dem aus der anderen Röhre kommenden Ozonstrom zusammentraf. Jeder der beiden zusammentreffenden Gasströme war für sich allein dunkel. Das gelblich-grüne Glühen entstand am Zusammenflußpunkte wieder und verschwand, wenn in einer der beiden Röhren die Entladung unterbrochen wurde. Ich folgerte daher, daß Luft nach dem Durchgang der Entladung irgendeinen Bestandteil enthält, der durch Ozon oxydiert werden kann und so das Glühen hervorbringt. Es stellte sich alsbald heraus, daß Stickoxyd die in Rede stehende Substanz war. Wenn ich dieses Gas, das ich auf chemischem Wege hergestellt hatte, in den aus der Vakuumröhre A kommenden Ozonstrom einleitete, erhielt ich in der Y-förmigen Röhre ein Glühen von der charakteristischen grünlich-gelben Farbe, das viel heller war, als ich es bei den früheren Versuchen je gesehen hatte. Es ist selbstverständlich, daß durch das Stickoxyd keine Entladung geschickt wurde. Das Stickoxyd wurde einfach als ein Nebenfluß in den Ozonstrom eingeleitet. Die Elektroden der Röhre B wurden nicht benutzt.

Ich schloß, daß das Nachglühen in Luft die Folge der drei nachstehenden Vorgänge ist:

1. der Bildung von Ozon in der Entladung,
2. der Bildung von Stickoxyd in der Entladung,
3. der Oxydation von Stickoxyd durch Ozon nach Beendigung der Entladung.

In der oben genannten Arbeit habe ich weitere Versuche beschrieben. Bei diesen Versuchen erhielt ich das Glühen durch Mischen von Stickoxyd mit Ozon, das ich bei Atmosphärendruck in der Siemensschen Ozonröhre hergestellt hatte. In diesem Falle ist es erforderlich, das Ozon durch fraktionierte Destillation zu konzentrieren.

Ich habe ferner gezeigt, daß Schwefelverbindungen, wie beispielsweise Schwefeldioxyd, die nach Ansicht der früheren Forscher für das Glühen wesentlich sein sollten, nur dadurch wirken, daß sie etwaige störende organische Materie aus der Röhre beseitigen. Ozon wird bei Anwesenheit organischer Materie zerstört, und zwar zweifellos zum Teil dadurch, daß es diese oxydiert, zum Teil aber auch, wie ich glaube, infolge einer katalytischen Wirkung.

Das Spektrum des gelblich-grünen Glühens ist kontinuierlich, jedenfalls in einem kleinen Spektrographen. Es erstreckt sich von $\lambda = 4200$ A.-E. bis $\lambda = 6700$ A.-E.

Schickt man Stickoxyd durch eine Glasröhre in die Flamme eines Bunsenbrenners, in dem in gewöhnlicher Weise Leuchtgas brennt, so entsteht die gelblich-grüne Farbe des Nachglühens der Luft. Dieselbe Wirkung erhält man mit Stickstoffdioxyd, und ich bin geneigt, dieses besondere Leuchten als auf Schwingungen des Stickstoffdioxydmoleküls beruhend anzusehen.

Dieselbe Farbe sieht man, wie E. Becquerel[1]) vor sehr langer Zeit beobachtet hat, an der Spitze einer Gebläseflamme. In diesem Falle spielt das synthetisch aus dem atmosphärischen Stickstoff bei hohen Temperaturen gebildete Stickstoffdioxyd dieselbe Rolle wie in dem eben beschriebenen Versuch das künstlich eingeführte Stickstoffdioxyd.

Das im Vorstehenden untersuchte Glühen können wir das Glühen der Luft nennen. Es ist von gelblich-grüner Farbe und zeigt ein kontinuierliches Spektrum. Es läßt sich gut durch die gewöhnliche Induktorentladung oder durch die Kondensatorentladung erzeugen. Man erhält es nur in Gemischen von Sauerstoff und Stickstoff. Die nebenstehende Tabelle zeigt den Effekt in verschiedenen Gemischen.

Wir wollen nun dieses Glühen mit jenem des aktiven Stickstoffs vergleichen. Letzteres ist orange gefärbt und zeigt (in einem kleinen Spektroskop) drei deutlich voneinander getrennte Banden: eine rote, eine gelbe und eine grüne. Man erhält es glänzend hell mit der Kondensatorentladung und nur sehr schwach mit der einfachen Induktorentladung. Das Gas, in dem es am schönsten auftritt, ist reiner Stickstoff. Manche Forscher haben geglaubt, daß Spuren von Sauerstoff erforderlich seien; es ist aber meine feste Ansicht, daß diese Forscher im Irrtum sind[1]). Die Wirkung verschiedener Sauerstoffbeimengungen wird durch die nachstehende Tabelle veranschaulicht:

1) La Lumière 1, 166.

Glühen der Luft.

Prozentgehalt an Sauerstoff in dem Gemisch	Intensität des Glühens
100	Kein Glühen.
90	Glänzend hell.
20	Mäßig.
5	Grenze der Sichtbarkeit.

Glühen des aktiven Stickstoffs.

Prozentgehalt an Sauerstoff	Intensität des Glühens
2	Kein Glühen.
1	Schwach.
1/10	Glänzend hell.
0	Glänzend hell.

Ich hoffe, diese Vergleichung wird klar erkennen lassen, wie das Glühen der Luft, das man erhält, wenn Sauerstoff zugegen ist, ganz von dem Glühen des aktiven Stickstoffs verschieden ist, das man bei Abwesenheit von Sauerstoff erhält. Es liegt auf der Hand, daß zwei meiner Kritiker, nämlich Tiede und Domcke, diese Unterscheidung nicht beachten. Sie führen nämlich einige der früheren Forscher[2]), welche das Glühen der Luft beschrieben haben, so an, als ob ihre Versuche das Glühen des aktiven Stickstoffs beträfen.

1) Eine weitere Veröffentlichung über diesen Gegenstand soll folgen.

2) Morren, Ann. de chim. (4) **4**, 293, 1865; Sarasin, Pogg. Ann. **140**, 425, 1876.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 5. Februar 1914.)

Ultrarote Dispersion zweiatomiger Kristalle.

Von W. Dehlinger.

Nachdem die bisherigen theoretischen Überlegungen über den Verlauf der spezifischen Wärme für einatomige Körper zu einer praktisch recht brauchbaren Formel geführt haben, kommt die Frage an die Reihe, inwiefern zwei- und

mehratomige Körper ein abweichendes Verhalten zeigen und inwiefern man jene eventuellen Abweichungen theoretisch verstehen kann.

Der erste und wesentliche Schritt in dieser Richtung wurde von W. Nernst getan bei Gelegenheit seines Göttinger Vortrages[1]). Gestützt auf das experimentelle Zahlenmaterial, das ihm zur Verfügung stand, konnte er zeigen, daß man zur Beschreibung des Temperaturverlaufs der spezifischen Wärme zweiatomiger Kristalle, wie *NaCl*, *AgCl* usw., eine Kombination der Debyeschen und der Einsteinschen Formel mit Erfolg verwenden kann. Die Schwingungszahl der Einsteinschen Formel wurde gleich der Reststrahlenschwingungszahl gesetzt, die Grenzschwingungszahl, welche in der Debyeschen Formel auftritt, wurde den Beobachtungen über die spezifische Wärme angepaßt.

Zur theoretischen Begründung dieses durch seinen praktischen Erfolg als richtig gekennzeichneten Verfahrens ging Nernst aus von der Vorstellung, daß das Debyesche Spektrum den Schwingungen der ganzen Moleküle gegeneinander entsprechen sollte, während die Einsteinsche Funktion mit ihrer Einzelschwingungszahl den innermolekularen Schwingungen der Atome gegeneinander Rechnung trägt. Es erhob sich schon damals die Frage, inwiefern diese spezielle Vorstellung über die Molekular- und Atomkräfte den Bau der vorgeschlagenen Kombination bedinge und ob man nicht eventuell auch auf Grund eines Madelungschen Modells, bei dem in den Eckpunkten des Raumgitters nicht die Moleküle, sondern die Einzelatome sich befinden, zu einem ähnlichen Schlußresultat gelangen könne. Mit Rücksicht auf die schon früher von Born und v. Kármán[2]) an Hand eines linearen Madelungschen Modells nachgewiesene Zweiteilung des elastischen Spektrums in einen von der Schwingungszahl Null anfangenden bis zu einer endlichen Größe gehenden Teil und einen anderen zwischen zwei endlichen Grenzen eingeschlossenen Teil, hielt Debye es damals schon für wahrscheinlich, daß das entsprechende sich auch im räumlichen Falle wiederfinden würde. Ist dem so, dann kann die Nernstsche Formel eben auch unter Benutzung eines Madelungschen Modells begründet werden.

Diese Frage in erster Näherung zu verfolgen, war das eine Ziel meiner daraufhin angefangenen Rechnungen. Aber auch nachdem diese Frage erledigt ist, kann man nicht behaupten, das Nernstsche Verfahren vollständig verstanden zu haben, wenn nicht erstens klar ist, warum nun auch bei dem neuen Modell die Schwingungszahl in der Einsteinschen Funktion mit der Reststrahlenschwingungszahl zu identifizieren ist. Zweitens, und das ist nicht weniger wesentlich, muß man sich mit der Frage auseinandersetzen, wie viele Reststrahlenfrequenzen auf Grund des Madelungschen Modells eigentlich zu erwarten sind. Madelung schließt ursprünglich auf eine, bei Born und v. Kármán werden deren fünf eingeführt, in einer neueren Arbeit von Thirring wird diese Behauptung übernommen.

Ein genaueres Studium, insbesondere der Born- und v. Kármánschen Arbeit, führte uns nun zu dem Schlusse, daß die Einführung jener fünf Frequenzen als Reststrahlenfrequenzen mehr als Vermutung aufgefaßt sein will. So ergab sich ein zweites Ziel der Arbeit in der Berechnung der Dispersion eines nach Madelung aufgebauten zweiatomigen Kristalls. Hierbei zeigte es sich, daß der Brechungsexponent eines solchen Körpers tatsächlich dargestellt werden kann durch eine Formel, welche vollständig identisch ist mit der von Ketteler bzw. Lorentz auf Grund einfach schwingender voneinander unabhängiger Ladungen abgeleiteten.

Im folgenden soll nun von der Kurve für die spezifische Wärme nicht weiter die Rede sein. Dazu veranlaßt uns einerseits die eben erschienene Arbeit von Thirring, in der diese Frage für hohe Temperaturen behandelt wird, außerdem beabsichtige ich an anderer Stelle ausführlich zu zeigen, in welchem Sinne und mit welcher Näherung die Nernstsche Formel als theoretisch begründet anzusehen ist. Nur das eine sei hier schon bemerkt, daß man in guter Näherung zu erwarten hat, daß die beiden von Nernst eingeführten Frequenzen sich verhalten wie die Wurzeln aus den Massen der das betreffende Molekül konstituierenden Atome. Dagegen wollen wir die Frage nach der Dispersion eingehend diskutieren. Wir kommen dabei zu dem obengenannten Resultat, welches man auch so lesen kann: Es existiert nur eine Reststrahlenfrequenz. Wir wollen nicht unterlassen, auf die neueren Untersuchungen von Rubens hinzuweisen, aus denen dasselbe auf experimentellem Wege hervorgeht.

In den ersten beiden Paragraphen werden die Bewegungsgleichungen für die Atome aufgestellt nach dem von Born und v. Kármán gegebenen Schema und ihre Bewegung berechnet bei Anregung durch eine elektrische Welle. In § 3 wird die dieser Bewegung angepaßte, den Maxwellschen Gleichungen entsprechende Dispersionsformel gegeben. § 4 beschäftigt sich mit den experimentell ermittelten Konstanten

1) Vorträge über die kinetische Theorie usw., gehalten in Göttingen. (Leipzig, B. G. Teubner 1914. Vgl. auch diese Zeitschr. **14**, 260, 1913.)

2) M. Born u. Th. v. Kármán, diese Zeitschr. **13**, 297, 1912.

jener Formel, in § 5 und § 6 werden diese Konstanten zu den theoretischen Ergebnissen in Beziehung gesetzt.

§ 1. Die Bewegungsgleichungen.

Die Atome eines regulären Kristalls denken wir uns in den Eckpunkten eines kubischen Gitters angeordnet. Für Körper dieser Konstitution, die aus lauter gleichen Atomen bestehen, haben Born und v. Kármán[1]) eine Bewegungsgleichung aufgestellt, die beim Übergang zu unendlich kleinem Atomabstand in die gewöhnliche elastische Gleichung eines regulären Kristalls übergeht. Bei Abwesenheit äußerer Kräfte gilt nach ihnen für die Verrückungen u, v, w eines Atoms von der Masse M, dessen Lage im Gitter durch die Indizes l, m, n bestimmt ist:

$$\begin{aligned} D_x = M\ddot{u}_{l,m,n} = {} & \alpha(u_{l+1,m,n} + u_{l-1,m,n} - 2u_{l,m,n}) \\ & + \beta(u_{l,m+1,n} + u_{l,m-1,n} + u_{l,m,n+1} + u_{l,m,n-1} - 4u_{l,m,n}) \\ & + \gamma(u_{l+1,m,n+1} + u_{l+1,m+1,n} + u_{l+1,m,n-1} + u_{l+1,m-1,n} + u_{l-1,m,n+1} + u_{l-1,m+1,n} \\ & \qquad + u_{l-1,m,n-1} + u_{l-1,m-1,n} - 8u_{l,m,n}) \\ & + \delta(u_{l,m+1,n+1} + u_{l,m-1,n+1} + u_{l,m+1,n-1} + u_{l,m-1,n-1} - 4u_{l,m,n}) \\ & + \varkappa(v_{l+1,m+1,n} + v_{l-1,m-1,n} - v_{l+1,m-1,n} - v_{l-1,m+1,n} + w_{l+1,m,n+1} + w_{l-1,m,n-1} \\ & \qquad - w_{l+1,m,n-1} - w_{l-1,m,n+1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Die Gleichungen $D_y = M\ddot{v}$ und $D_z = M\ddot{w}$ ergeben sich aus (1) durch zyklische Vertauschung der u, v, w und zyklisch veränderte Zunahme der l, m, n (z. B. heißt es statt $u_{l,m+1,n}$ in D_y: $v_{l,m,n+1}$, in D_z: $w_{l+1,m,n}$).

(Anmerkung: Die Indizes l, m, n sind die Ordnungszahlen eines Atoms in der x-, y- und z-Richtung. Wir legen die Kanten unserer Kuben in die Koordinatenrichtungen. Ist dann mit a die Kantenlänge der Kuben bezeichnet, so stehen die l, m, n und x, y, z in der Verbindung:

$$x = la, \quad y = ma, \quad z = na.$$

Der Bornsche Ansatz beruht auf der Voraussetzung, daß die potentielle Energie eine homogene quadratische Funktion der Verrückungen der Atome ist. Die Kraft, die auf ein Atom wirkt, ist also streng genommen von der Verrückung sämtlicher Atome abhängig, und kann nur annäherungsweise durch den Ansatz (1) dargestellt werden durch die Annahme, daß die Kräfte mit wachsender Entfernung sehr schnell verschwinden. Im übrigen sei auf Born und v. Kármán, l. c. verwiesen.)

Bei zweiatomigen Verbindungen des regulären Systems sollen abwechselnd Atome von großen und kleinen Massen, M_1 und M_2, in den Eckpunkten des Gitters liegen. Für $NaCl$ also z. B. M_1 = Masse eines Atoms Cl, M_2 = Masse eines Atoms Na.

Unter Voraussetzung gleicher quasielastischer Kräfte für beide Atomarten können wir dann für jedes Atom eine Bewegungsgleichung aufschreiben, die analog (1) ist. Setzen wir noch fest, daß Atome der Masse M_2 sich im Gitter an Stellen gerader Indizessumme (d. h. wo $l + m + n$ = einer geraden Zahl), Atome der Masse M_1 aber an Stellen ungerader Indizessumme sich befinden, so sind bei Abwesenheit äußerer Kräfte die Bewegungsgleichungen bekannt.

Es seien nun die Atome M_2 und M_1 positiv bzw. negativ elektrisch geladen. Lassen wir nun im Innern unseres Körpers eine ebene elektrische Welle sich ausbreiten, so ist nach Drude die hierdurch auf eine Ladung e ausgeübte Kraft gleich $e\mathfrak{E}$, wenn $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke in dieser Welle bedeutet. Nach Lorentz ist hierzu noch eine weitere Kraft $e\mathfrak{P}/3$ zu addieren[1]), wobei $\mathfrak{P}$ die Polarisation des Körpers bedeutet. Allerdings entspricht das hier zugrunde gelegte Modell nicht ohne weiteres der Grundlage der H. A. Lorentzschen Rechnung. Bedenkt man indessen, daß man in jedem Eckpunkt des Gitters eine Ladung Null hinzufügen kann, bestehend aus $+e$ und $-e$, welche natürlich die Kräfte nicht ändern kann, dann zeigt sich, daß die ganze Wirkung an irgendeiner Stelle zusammengesetzt gedacht werden kann aus

a) der Wirkung der unverschobenen Atome,

b) der Wirkung von Dipolen, welche man in den Eckpunkten des Gitters konzentriert denken kann.

Für uns ist nur von Interesse die unter b genannte Wirkung, und eben diese wurde von Lorentz schon berechnet zu dem oben angegebenen Werte.

Schreiben wir für $\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{P}}{3}$ die Abkürzung $\mathfrak{R}$, so heißt die x-Komponente unserer Bewegungsgleichung bei einfallender Welle $\mathfrak{E}$:

$$\begin{aligned} M_2\ddot{u}_g &= D_x + e\mathfrak{R}_x \\ M_1\ddot{u}_u &= D_x - e\mathfrak{R}_x. \end{aligned} \tag{2}$$

1) Born u. v. Kármán, l. c.

1) Wir benutzen durchweg rationelle Einheiten, in elektrostatischen Einheiten sollte statt $\mathfrak{P}$ stehen $4\pi\mathfrak{P}$.

Hier ist D_x die rechte Seite der Gleichung (1); die Indizes g und u bedeuten gerade und ungerade Indizessumme. In D_x sind natürlich alle Indizes entsprechend den Indizes u auf der linken Seite von (2) zu wählen. Im folgenden Paragraphen setzen wir diese der Gleichung (1) entnommenen Werte in (2) ein und bestimmen die zugehörigen Verrückungen.

§ 2. Lösung.

Die elektrische Feldstärke der einfallenden Lichtwelle sei gegeben als

$$\mathfrak{E} = E\, e^{-i\omega t} \cdot e^{i(l\varphi + m\psi + n\chi)}.$$

Dann können wir auch $\mathfrak{R}$ darstellen in der Form:

$$K \cdot e^{-i\omega t}\, e^{i(l\varphi + m\psi + n\chi)},$$

wobei K ein Vektor mit den Komponenten K_x, K_y, K_z bedeutet.

Nehmen wir an, daß für u, v, w Lösungen existieren, die ebene Wellen mit der gleichen Schwingungszahl darstellen, so können wir für die Teilchen mit gerader Indizessumme ansetzen:

$$\left.\begin{aligned} u_g &= A_2\, e^{-i\omega t}\, e^{i(l\varphi + m\psi + n\chi)} \\ v_g &= B_2\, e^{-i\omega t}\, e^{i(l\varphi + m\psi + n\chi)} \\ w_g &= C_2\, e^{-i\omega t}\, e^{i(l\varphi + m\psi + n\chi)}, \end{aligned}\right\} \quad \text{G.}$$

und für die Teilchen ungerader Indizessumme:

$$\left.\begin{aligned} u_u &= A_1\, e^{-i\omega t}\, e^{i(l\varphi + m\psi + n\chi)} \\ v_u &= B_1\, e^{-i\omega t}\, e^{i(l\varphi + m\psi + n\chi)} \\ w_u &= C_1\, e^{-i\omega t}\, e^{i(l\varphi + m\psi + n\chi)}. \end{aligned}\right\} \quad \text{U.}$$

Die Indizes g und u bedeuten gerade bzw. ungerade Indizessumme. Setzen wir diese Lösungen in (2) ein, so erhalten wir mit $\delta = 0$, $\gamma = \varkappa$:

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 M_2 A_2 &= \alpha(2A_1\cos\varphi - 2A_2) + \beta\{2A_1(\cos\psi + \cos\chi) - 4A_2\} \\ &\quad + 4\gamma[A_2\{\cos\varphi(\cos\psi + \cos\chi) - 2\} - B_2\sin\varphi\sin\psi - C_2\sin\varphi\sin\chi] + eK_x \\ -\omega^2 M_1 A_1 &= \alpha(2A_2\cos\varphi - 2A_1) + \beta\{2A_2(\cos\psi + \cos\chi) - 4A_1\} \\ &\quad + 4\gamma[A_1\{\cos\varphi(\cos\psi + \cos\chi) - 2\} - B_1\sin\varphi\sin\psi - C_1\sin\varphi\sin\chi] - eK_x. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die y- und z-Komponente unserer Gleichungen erhält man durch zyklische Vertauschung der φ, ψ, χ, während zugleich A durch B bzw. C ersetzt wird.

Sind nun p, q, r die Richtungskosinusse der einfallenden Welle, so ergibt sich aus dem Zusammenhang der Koordinaten x, y, z mit den Ordnungszahlen l, m, n der Massen die Beziehung:

$$\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot p, \quad \psi = \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot q, \quad \chi = \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot r,$$

wenn a der Atomabstand in Richtung der Koordinatenachsen, λ die Wellenlänge im Kristall ist. So lange der Brechungsexponent nicht zu groß wird ist also $\lambda \gg a$, und wir können näherungsweise $\cos\varphi = \cos\psi = \cos\chi = 1$ setzen[1]). Tun wir dies in Gleichung (3), ordnen sie nach A_2 und A_1, so wird sie nach Ausführung der zeitlichen Differentiation:

$$\left.\begin{aligned} A_2(F - \omega^2 M_2) - A_1 F &= eK_x \\ A_2 F - A_1(F - \omega^2 M_1) &= eK_x, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wenn noch F zur Abkürzung für $2\alpha + 4\beta$ geschrieben ist. Die entsprechenden Gleichungen der y- und z-Komponente folgen ebenso. Hieraus können wir dem Ansatz G. und U. entsprechend die Verrückungskomponenten berechnen; denn wir erhalten aus (4) für die Amplituden:

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= \frac{\omega^2 e M_1}{\Delta} K_x, \qquad B_2 = \frac{\omega^2 e M_1}{\Delta} K_y, \qquad C_2 = \frac{\omega^2 e M_1}{\Delta} K_z; \\ A_1 &= -\frac{\omega^2 e M_2}{\Delta} K_x, \quad B_1 = -\frac{\omega^2 e M_2}{\Delta} K_y, \quad C_1 = -\frac{\omega^2 e M_2}{\Delta} K_z. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Verrückungen sind also proportional mit K und erfolgen in gleicher bzw. entgegengesetzter Richtung, der Ladung der Atome entsprechend.

In (5) bedeutet Δ die Determinante der Gleichungen (4) und der anderen beiden Komponentengleichungen. Sie hat für alle denselben Wert, nämlich

$$\Delta = F(M_1 + M_2)\omega^2 - M_1 M_2 \omega^4. \quad (6)$$

§ 3. Die Dispersionsformel.

Die Wellengleichung erhalten wir in bekannter Weise aus einer der Komponenten der Maxwellschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{E}} + \varrho\mathfrak{v}) &= \operatorname{rot}\mathfrak{H}, \\ \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}} &= -\operatorname{rot}\mathfrak{E}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

wenn wir statt $\varrho\mathfrak{v}$ das von uns gefundene $\dot{\mathfrak{P}}$, die zeitliche Ableitung der Polarisation, einsetzen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_0 im Medium wird in der Form angesetzt:

1) Da im ultraroten Gebiet λ/a etwa den Wert 10^3 hat, müßte n schon 1000 werden, damit auf eine Wellenlänge nur mehr 100 Atome kommen. Es ist also klar, daß in dem der experimentellen Beobachtung zugänglichen Gebiet $\lambda/a = \infty$ gesetzt werden darf.

$$c_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}};$$

dann ist ε definiert durch die Gleichung:

$$\varepsilon \mathfrak{E} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P},$$

und bedeutet die „Dielektrizitätskonstante" für Wellen der Schwingungszahl ω.

Gemäß unserem bisher angenommenen Bild von der Konstitution des Kristalls wird

$$\mathfrak{P}_x = N \cdot e \cdot (u_2 - u_1), \qquad (8)$$

wenn N die Anzahl positiv geladener Atome pro cm³ bedeutet.

Durch Einsetzen der Werte von u_2 und u_1 wird also

$$\mathfrak{P}_x = \frac{N e^2 (M_1 + M_2)}{F (M_1 + M_2) - M_1 M_2 \omega^2} \cdot K_x. \qquad (9)$$

Nun haben wir in § 1 K zur Abkürzung gesetzt für $\mathfrak{E} + \mathfrak{P}/3$, also wird

$$\mathfrak{P}_x = \frac{N e^2 (M_1 + M_2)}{F (M_1 + M_2) - M_1 M_2 \omega^2} \left(\mathfrak{E}_x + \frac{\mathfrak{P}_x}{3} \right)$$

und

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \frac{N e^2}{\frac{F}{M} - \omega^2}, \qquad (10)$$

wo M zur Abkürzung für $\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ geschrieben ist.

Der aus (10) berechnete Wert der „Dielektrizitätskonstante" ε ist in bekannter Weise zu identifizieren mit dem Quadrat des komplexen Brechungskomponenten $\mathfrak{n}$, der in sich enthält den gewöhnlichen Brechungsexponenten n und den Absorptionsindex $\varkappa$ nach der Formel

$$\mathfrak{n} = n (1 - i\varkappa).$$

Da wir an dieser Stelle gar nicht weiter eingegangen sind auf die Ursachen der Dämpfung der elektrischen Wellen, ist es von vornherein klar, daß unsere Formel (10) auch die Absorptionsverhältnisse nicht richtig darstellen kann. Es kommt dieses auch schon darin zum Ausdruck, daß aus (10) im wesentlichen Teile des Gebietes in dem ω variieren kann, für $\mathfrak{n}$ ein reeller Wert folgt. Andererseits kann aber ebenso bestimmt behauptet werden, daß die Dispersion in einigem Abstande des Absorptionsbandes durch (10) darstellbar ist, wie das ja ähnlich von den gewöhnlichen Dispersionsformeln her bekannt ist.

Die wesentliche Eigenschaft der Formel (10) kommt darin zum Ausdruck, daß der Nenner des rechten Gliedes nur für einen einzigen Wert von ω verschwinden kann. Wir dürfen mit Recht daraus schließen, daß im ultraroten Gebiet nur an einer einzigen Stelle im Spektrum Reststrahlen auftreten können[1]).

In der Gleichung (10) sind die Ladungen noch als absolut starr verbunden mit den Atomen vorausgesetzt. Lassen wir den Ladungen noch Schwingungen gegen die Atome zu und nehmen obendrein die Existenz schwingungsfähiger Elektronen im Innern der Atome an, so müssen wir statt (10) schreiben:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N e^2}{\frac{3M}{\frac{F}{M} - \omega^2}} + \sum_i \frac{A_i}{\omega_i^2 - \omega^2}, \qquad (10')$$

wobei A_i und ω_i die für diese Elektronen charakteristischen Konstanten bedeuten.

Diese Gleichung ist analog der von Ketteler

$$n^2 - 1 = \sum_k \frac{M_k}{\omega_k^2 - \omega^2}, \qquad (11)$$

und genau gleich der von Goldhammer[2]) für Sylvin aufgestellten:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum_g \frac{M_g}{\omega_g^2 - \omega^2}. \qquad (12)$$

Trotz der völlig verschiedenen Grundlage gegenüber den früheren Dispersionstheorien werden wir, wie man sieht, doch zur bekannten Ketteler-Helmholtzschen Gleichungsform zurückgeführt.

Ist die vorgeschlagene Theorie richtig, dann muß es, wie (10) zeigt, möglich sein, den Zähler in dem auf die ultraroten Schwingungen bezüglichen Gliede aus Masse und Ladung der Atome vorher zu bestimmen. Daß in diesem Gliede nicht die Masse der Elektronen, sondern die der Atome eine Rolle spielt, wurde schon von Drude[3]) hervorgehoben. Allerdings hielt derselbe fest an der Annahme, daß jedes Atom oder Molekül durch eine quasielastische Kraft an einen raumfesten Punkt gebunden wäre, wie man das sonst zu tun pflegt bei den Elektronen in den unbeweglich angenommenen Molekülen. Dem entspricht es, daß er nicht von vornherein angeben konnte, welche Bedeutung der Masse M eigentlich zuzuschreiben sei. Es ist aber immerhin bemerkenswert, daß in jener Weise eine Formel erhalten werden konnte, die vollständig unserer, auf Grund gegenseitiger Bindung der Atome, abgeleiteten Formel entspricht.

Die zweite, in dem betreffenden Gliede vorkommende Konstante F/M, welche einer Reso-

1) Die von M. Born und v. Kármán l. c. ausgesprochene Vermutung über die Existenz mehrerer Stellen metallischer Reflexion wird also nicht bestätigt.

2) D. A. Goldhammer, Dispersion und Absorption des Lichtes. Leipzig, B. G. Teubner 1913.

3) Drude, Ann. d. Phys. 14, 677 ff., 1904.

nanzschwingungszahl entspricht, enthält außer den Massen noch die Kräfte zwischen den Atomen. Inwiefern aus elastischen Messungen auf F/M geschlossen werden kann, soll in einem späteren Paragraphen diskutiert werden.

§ 4. Experimentelle Werte für die Konstanten der Dispersionsformel.

Wenn man annimmt, daß die ω_g, die aus der Elektronenbindung sich berechnen, alle sehr groß sind gegen ω_1, wie wir nun statt $\sqrt{\frac{F}{M}}$ schreiben wollen, so läßt sich für das Gebiet, in dem $\omega \ll \omega_r$ (für e alle anderen Werte als 1 genommen), unsere Dispersionsformel in der Form schreiben

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{Ne^2}{3M} \cdot \frac{1}{\omega_1^2-\omega^2} + S, \qquad (13)$$

wobei S als konstant angesehen werden kann. Führt man statt der ω noch die Schwingungszahlen $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ ein, so können wir statt (13) schreiben

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{A}{\nu_1^2-\nu^2} + S, \qquad (14)$$

wobei

$$A = \frac{1}{4\pi^2} \frac{Ne^2}{3M} \qquad (14')$$

sein soll.

Da wir nun wissen, daß die ν_1 der Größenordnung nach übereinstimmen mit den Schwingungszahlen der Reststrahlen, so verlangt die vorgeschlagene Theorie Übereinstimmung der theoretisch berechneten Werte von A mit solchen Werten von A, die sich, unter Zugrundelegung der Formel (14), aus Dispersionsbeobachtungen im Ultrarot berechnen lassen.

Auf dem letzteren Wege findet man für die drei Konstanten A, ν_1^2 und S bei den Substanzen $NaCl$, KCl und CaF_2 aus den Beobachtungen über n im ultraroten Teil des Spektrums die Werte der folgenden Tabelle[1]).

Tabelle I.

	A	ν_1^2	S
$NaCl$ . . .	$1{,}37 \cdot 10^{25}$	$4{,}14 \cdot 10^{25}$	0,310
KCl . . .	$8{,}25 \cdot 10^{24}$	$3{,}18 \cdot 10^{25}$	0,282
CaF_2 . . .	$5{,}36 \cdot 10^{25}$	$1{,}325 \cdot 10^{26}$	0,257

1) Es wurden einige Beobachtungen willkürlich herausgegriffen und aus dieser die drei Konstanten berechnet. In der Tabelle sind abgerundete Werte angegeben.

Im betrachteten Gebiet gibt Formel (14) die Beobachtungen ganz gut wieder[1]). Um die so gefundenen Werte der Konstanten mit der Theorie vergleichen zu können, muß aber noch einiges gesagt werden über die Bedeutung der Schwingungszahl ν_1; diese Konstante darf nämlich nicht gleich gesetzt werden der Schwingungszahl der Reststrahlen. Auch ist noch eine Bemerkung über ihre Beziehung zu den elastischen Konstanten zu machen, was im folgenden Paragraphen geschehen soll.

§ 5. Beziehung zu den Reststrahlen.

a) Die Wellenlänge bzw. Schwingungszahl der Reststrahlen muß an der Stelle liegen, an welcher der Brechungsexponent n in der Dispersionsformel unendlich wird. In Formel (14) berechnet sich dann der Wert von ν, der dieser Bedingung genügt, aus der Beziehung:

$$\frac{A}{\nu_1^2-\nu^2} + S = 1. \qquad (15)$$

weil $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ für $n = \infty$ den Wert 1 annimmt.

Der Wert ν_r^2, der den Reststrahlen entspricht, wird also

$$\nu_r^2 = \nu_1^2 + \frac{A}{1-S}. \qquad (16)$$

Um (14) mit der Erfahrung zu vergleichen, müssen wir also nicht ν_1, sondern ν_r benutzen.

b) Die quantitative Bestimmung von ν_1 aus den elastischen Konstanten[2]) kann nicht aus dem Bornschen Ansatz erwartet werden. Bei den Vernachlässigungen, die ihn ermöglichen, treten noch fünf Konstanten auf, die sich nicht alle in den drei elastischen Konstanten ausdrücken lassen. Dies wird vielmehr erst durch eine weitere Vernachlässigung möglich; mit anderen Worten, wenn wir ν_1 aus den elastischen Konstanten berechnen, so dürfen wir höchstens eine Übereinstimmung der Größenordnung nach erwarten mit dem aus optischen Beobachtungen resultierenden ν_1.

Daß es nicht möglich ist, das optische ν_1 aus elastischen Beobachtungen zu berechnen, leuchtet aber auch aus einem anderen Grunde ein. Denn bei den optischen Wellen schwingen je zwei benachbarte Atome in entgegengesetzter Phase. Bei elastischen Beobachtungen kommen aber die hierbei entstehenden elektrischen Kräfte nicht in Frage, und man kann deshalb nicht erwarten, nur aus elastischen Angaben die optischen Verhältnisse ableiten zu können.

1) Für diese Kontrolle wurden die nicht abgerundeten Werte benutzt.

2) Vgl. Born u. v. Kármán, l. c.

§ 6. Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung.

In diesem Paragraphen sollen die für die verschiedenen Konstanten theoretisch zu erwartenden Werte auf Grund der Bemerkungen der beiden vorhergehenden Paragraphen mit den in § 4 aus der Beobachtung erhaltenen Zahlen verglichen werden. Der besseren Übersicht halber haben wir die betreffenden Zahlen in einigen Tabellen zusammengestellt. Zur Erklärung der Bedeutung der in den Tabellen benutzten Abkürzungen dienen die folgenden Bemerkungen:

Tabelle II.

	λ_K in μ	λ_r in μ	λ_K in μ
KCl	62	64	67
$NaCl$	54	62	54
CaF_2	26	37	35

In Tabelle II stehen in der ersten Spalte die direkt beobachteten Werte λ_K für die Reststrahlenwellenlänge. In der zweiten Spalte stehen die aus den Konstanten der Tabelle I (§ 4) berechneten Werte derselben Wellenlänge. Schon früher sahen wir, daß die theoretische Frequenz r_r nicht mit r_1 der Tabelle I zusammenfällt, vielmehr nach Formel (16) zu berechnen sei. Aus dem in dieser Weise erhaltenen Werte folgen die angegebenen Zahlen für λ_r. Ein Vergleich der beiden Spalten zeigt nicht unerhebliche Differenzen, welche indessen nicht imstande sind, begründete Zweifel zu erwecken an der allgemeinen Form der zugrunde gelegten Dispersionsgleichung. Würde man das Lorentzsche Zusatzglied nicht benutzen, dann käme man zu der Dispersionsformel

$$\frac{n^2-1}{3} = \frac{A'}{\nu_1'^2-\nu^2} + S', \qquad (17)$$

in der natürlich auch wieder die drei neuen Konstanten A', ν_1', S' aus den Beobachtungen zu bestimmen sind. Diese Rechnung brauchte nicht mehr ausgeführt zu werden, da bis jetzt in der Literatur (Paschen, Rubens) mit dieser Formel gerechnet wurde. Dieselbe hat sich für die Darstellung der Beobachtungen sehr gut bewährt, und es ist deshalb unmöglich, aus rein praktischen Gründen sich für oder gegen die Lorentzsche Kraft zu entscheiden. Im Ansatz (17) bedeutet ν_1' direkt die Reststrahlenfrequenz; die zugehörige Wellenlänge λ_K wurde in der dritten Spalte der Tabelle II angegeben, wobei der Index K deshalb gewählt wurde, weil die Form (17) die Kettelersche Form der Dispersionsgleichung ist. Auch ein Vergleich zwischen λ_K und λ_K führt zu keiner praktischen Entscheidung zwischen (14) und (17).

Eine gewisse Kontrolle erhält man noch dadurch, daß man die beobachteten Dielektrizitätskonstanten vergleicht mit den für $\nu = 0$ aus (17) oder (14) folgenden Werten für n^2. Das geschieht in Tabelle III.

Tabelle III.

	$\varepsilon_{\text{beobachtet}}$	ε_L	ε_K
KCl	4,9	4,5	4,6
$NaCl$	5,8 bis 6,3	6,2	5,2
CaF_2	6,6 „ 6,9	6,6	6,1

Neben $\varepsilon_{\text{beob.}}$ wurden aufgenommen die Werte $\varepsilon_L = n^2$ aus (14) und $\varepsilon_K = n^2$ aus (17)[1]). Die Übereinstimmuug mit den beobachteten Werten ist befriedigend, eine praktische Entscheidung zwischen (14) und (17) nicht wohl möglich.

Von besonderem Interesse ist die Frage, ob man die Konstante A bzw. A' der Dispersionsformeln (14) bzw. (17) von vornherein theoretisch berechnen kann. In beiden Formeln sollten diese Größen denselben Wert haben, welcher aus (14′) sich zu

$$A = A' = \frac{1}{4\pi^2} \frac{Ne^2}{3M} \qquad (18)$$

ergibt, wobei N die Anzahl positiv geladener Atome pro cm³ bedeutet, e die Ladung eines solchen Atoms ist und M eine Abkürzung ist für

$$M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \qquad (18')$$

wenn M_1 bzw. M_2 die wirklichen Massen der Atome darstellen.

An Stelle der auf die Atome bezüglichen Größen kann man in (21) und (21′) das elektrochemische Äquivalent E, die üblichen Atomgewichte G_1, G_2 und die Dichte ϱ einführen. Man erhält dann

$$A = A' = \frac{1}{3\pi} \frac{\varrho E^2}{G_1 + G_2} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right), \qquad (19)$$

wenn E im gewöhnlichen elektrostatischen System gemessen wird

$$(E = 9654 \cdot 3 \cdot 10^{10}\, \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{sec}^{-1}).$$

In Tabelle IV haben wir nun die aus (19) folgenden Werte für KCl, $NaCl$, CaF_2 in der ersten Spalte eingetragen.

Wegen der Zweiwertigkeit von Ca wurde CaF_2 so behandelt, als ob die positive Ladung von Ca dem Verlust von zwei Elektronen entspräche, F_2 wurde mit $G_2 = 38$ als Atom be-

1) Vgl. auch Rubens u. Nichols, Wied. Ann. **60**, 455, 1897.

Tabelle IV.

	$A_{\text{theoretisch}}$	A aus (14)	A' aus (17)
KCl	$1{,}27 \cdot 10^{25}$	$0{,}825 \cdot 10^{25}$	$1{,}50 \cdot 10^{25}$
$NaCl$. . . .	$2{,}35 \cdot 10^{25}$	$1{,}37 \cdot 10^{25}$	$2{,}69 \cdot 10^{25}$
CaF_2. . . .	$7{,}4 \cdot 10^{25}$	$5{,}37 \cdot 10^{25}$	$9{,}7 \cdot 10^{25}$

handelt; statt E^2 hat man dann in (19) $4E^2$ zu substituieren.

In der zweiten Spalte stehen zum Vergleich die früher in Tabelle I aus den Beobachtungen abgeleiteten Werte von A, welche der Formel (14) angepaßt sind. Die dritte Spalte enthält die Werte von A', welche in die Formel (17) einzusetzen sind, um den Anschluß an die Beobachtungen zu erreichen.

Währenddem A regelmäßig zu klein erscheint, ist A' regelmäßig zu groß gegenüber dem theoretischen Wert. Es dürfte indessen wohl möglich sein, daß eine genauere Diskussion der Versuche oder die Einführung der Absorption in der theoretischen Formel eine bessere Übereinstimmung zustande bringen würde. Jedenfalls aber ist die jetzt schon erreichte Übereinstimmung wohl imstande, Vertrauen zu erwecken für die Richtigkeit der Beziehung (18) bzw. (19).

In § 5 haben wir weiterhin Gründe angeführt, weshalb man nicht erwarten darf, daß die aus den elastischen Konstanten berechnete Reststrahlenschwingungszahl genau mit der beobachteten übereinstimmt. Viel wesentlicher ist die früher schon gemachte Bemerkung, daß sich theoretisch nur eine Schwingungszahl ergibt. Von einem zahlenmäßigen Vergleich sehen wir hier ab, da die von uns angegebene Schwingungszahl schon vorkommt unter den verschiedenen Schwingungszahlen, welche Born und v. Kármán[1]) meinten zu verschiedenen Reststrahlengebieten in Beziehung setzen zu müssen. Aus den dort angegebenen Zahlen sieht man, daß die Größenordnung richtig getroffen wird.

Die obigen Untersuchungen wurden auf Veranlassung von P. Debye unternommen, mit dem ich auch des öfteren Gelegenheit hatte, darüber zu sprechen.

1) Born u. v. Kármán, l. c.

(Eingegangen 6. Februar 1914.)

Zur Theorie der Dielektrika. Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante. Pyroelektrizität.

Von S. Boguslawski.

Einleitung. Die gewöhnliche Theorie der Dielektrika, so wie sie etwa von H. A. Lorentz in seinem Buche „The theory of electrons" dargestellt wird, geht von der Vorstellung aus, daß im Innern der Materie elektrische Ladungen (Elektronen oder Ionen) eingebettet sind, welche im Falle eines Nichtleiters an feste Ruhelagen gebunden sind. Über die Kräfte, durch die diese Bindung erfolgt, wird die Annahme gemacht, daß sie quasielastisch sind. Von dieser Annahme aus gelangt man dann zu bestimmten Aussagen über das Verhalten der Dielektrika, von welchen hier gleich zwei hervorgehoben werden sollen. Erstens gelangt man zur Vorstellung, daß die elektrischen Polarisationen stets proportional den Feldstärken sind, wie stark auch die letzteren sein mögen. Zweitens kommt man zum Schluß, daß die (Clausius-Mosotti-Lorenz-Lorentzsche) Größe $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{\varrho}$, unter ε die Dielektrizitätskonstante, unter ϱ die Dichte des Stoffes verstanden, eine für den Stoff charakteristische Materialkonstante sein muß, d. h. daß sie unabhängig von Temperatur, Druck und anderen äußeren Bedingungen ist.

Was das erste der genannten Resultate anbelangt, so gibt es bisher nur ein experimentelles Ergebnis, nämlich das von Ratnowsky[1]), welches ihm widerspricht. Bei der Messung der Dielektrizitätskonstante einer Mischung von Benzol mit Amylalkohol fand Ratnowsky eine kleine Abnahme der Dielektrizitätskonstanten mit steigender Feldstärke. Bei der Schwierigkeit der betreffenden Messungen wäre eine weitere Bestätigung dieses Resultats erwünscht. Aber jedenfalls ist die Existenz einer solchen Abweichung von der Linearität auch a priori nicht unwahrscheinlich, sobald es sich um genügend starke Felder handelt.

Das zweitgenannte Gesetz der gewöhnlichen Theorie, nämlich die Beziehung

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{\varrho} = \text{const}$$

gilt aber bekanntlich nur in ganz roher Näherung.

Vor etwa zwei Jahren schlug P. Debye[2]) eine Theorie der Dielektrika vor, welche der P. Weissschen Theorie der ferromagnetischen Körper nachgebildet ist. Von der Annahme ausgehend, daß die Substanzen neben Polari-

1) S. Ratnowsky, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 497, 1913.

2) P. Debye, diese Zeitschr. 13, 97, 1912. Die numerische Prüfung der Theorie, welche in dieser vorläufigen Mitteilung steht, enthält die nicht zutreffende Voraussetzung, daß die Änderung der Dichte mit der Temperatur bei der Berechnung von $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{\varrho}$ vernachlässigt werden kann. Die mitgeteilten Zahlen dürfen also nicht als Stützen der Debyeschen Theorie aufgefaßt werden.

sationselektronen auch permanente elektrische Dipole enthalten, kommt Debye zu einer befriedigenden Beschreibung derjenigen Fälle, wo die Größe $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{\varrho}$ mit steigender Temperatur abnimmt. Von einer größeren Anzahl Flüssigkeiten, für die sowohl die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante wie die Wärmeausdehnung gemessen worden sind, ist es aber der Äthyläther allein, der ein solches, nach der Debyeschen Auffassung allein mögliches Verhalten zeigt. Für die übrigen Stoffe gilt das umgekehrte, es nimmt nämlich die Größe $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{\varrho}$ mit steigender Temperatur zu. Zur Erklärung eines solchen Verhaltens nutzt die Einführung von Dipolen nichts, und man würde dann zu einer neuen Hypothese greifen müssen.

Wir wollen im folgenden eine Vorstellung verfolgen, welche es gestattet, sowohl ein Wachsen wie ein Abnehmen der Größe $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{\varrho}$ von einem einheitlichen Standpunkte aus zu verstehen.

§ 1. Die Annahme über das Wesen des Dielektrikums. Die übliche Vorstellung von dem Wesen des Dielektrikums wollen wir nur in der Richtung modifizieren, daß wir das Postulat rein quasielastischer Kräfte aufgeben wollen. Aus der Stabilität der Bindung einer Ladung allein kann gefolgert werden, daß einer Verschiebung der Ladung aus ihrer Ruhelage um eine Strecke x eine Arbeit entspricht, welche in der Form geschrieben werden kann:

$$A = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots$$

mit einem wesentlich positiven Koeffizienten a.

Statt wie gewöhnlich diese Reihe mit dem ersten, quadratischen Gliede abzubrechen, wollen wir auch die beiden weiteren hingeschriebenen Glieder mitführen und erst mit dem Gliede vierter Ordnung abbrechen[1]).

Für isotrope Körper und für alle solche Kristalle, bei welchen entgegengesetzte Richtungen einander gleichwertig sind, muß b nach Symmetrie gleich Null sein.

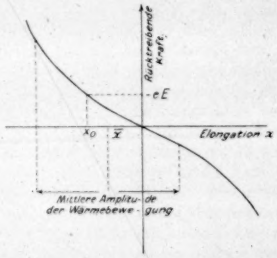
Dagegen für Kristalle mit ausgezeichneten Richtungen, als deren typischer Repräsentant Turmalin gelten darf, gibt die Einführung der Konstante b die Möglichkeit, den Mechanismus zu verstehen, durch den diesen Kristallen eigentümliche Erscheinung der Pyroelektrizität zustande kommt.

Es ist unsere Aufgabe, das elektrische Moment der Volumeinheit eines Körpers zu berechnen, in dessen Innerem eine elektrische Kraft E wirksam ist. Dazu haben wir den Mittelwert der Elongation x einer Ladung e aus ihrer Ruhelage zu finden, mit der Ladung e zu multiplizieren und über alle vorhandenen Ladungen zu summieren.

Es ist leicht zu sehen, daß das Vorhandensein eines Gliedes vierter Ordnung im Ausdruck für A eine Abhängigkeit der mittleren Elongation x von der Temperatur mit sich bringt. Sei die rücktreibende Kraft

$$-2ax - 4cx^3$$

durch die Kurve der Figur dargestellt. Beim Fehlen einer Wärmebewegung würde die Ladung



in einem Felde E eine Ruhelage x_0 einnehmen, die durch die Gleichung

$$eE = 2ax_0 + 4cx_0^3$$

bestimmt wird. Bei der Temperatur T schwankt die Ladung hin und her, und da die rücktreibende Kraft dissymmetrisch um den Punkt x_0 verläuft, sind die Ausschläge nach einer Richtung größer als nach der entgegengesetzten, so daß sich ein Mittelwert $\bar{x}$ ergibt, der von x_0 verschieden ist.

Ist auch $b \neq 0$, so verläuft die rücktreibende Kraft dissymmetrisch auch um den Punkt $x = 0$. Dann ist auch beim Fehlen eines Feldes infolge der Wärmebewegung allein eine von Null verschiedene mittlere Elongation $\bar{x}$ zu erwarten.

Die Berechnung des Mittelwertes $\bar{x}$ wollen wir auf Grund der Maxwell-Boltzmannschen Formel

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{\Phi(x)}{kT}} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\Phi(x)}{kT}} dx} \qquad (1)$$

[1]) Ein Glied vierter Ordnung wurde schon von W. Voigt zur Erklärung der elektrischen Doppelbrechung benutzt (vgl. W. Voigt, Elektro- und Magnetooptik). Die Frage, ob die elektrischen und optischen Eigenschaften der Körper auf der Wirkung derselben Ladungen beruhen, wollen wir hier offen lassen.

durchführen[1]). Unter $\Phi(x)$ ist hierbei die Arbeit verstanden, die nötig ist, um die Ladung e aus ihrer Ruhelage an die Stelle x zu bringen. Es ist somit in unserem Falle

$$\Phi(x) = -eEx + ax^2 + bx^3 + cx^4. \quad (2)$$

Die Größe kT im Nenner des Exponenten in (1) ist das Doppelte der Energie, die nach dem Gleichverteilungssatz jedem Freiheitsgrad des Systems bei der absoluten Temperatur T zukommt.

§ 2. Ausrechnung des Mittelwertes. Bei Ausrechnung des Mittelwertes (1) führen wir zunächst folgende Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{eE}{kT} = \xi; \quad \frac{a}{kT} = \alpha, \quad \frac{b}{kT} = \beta, \quad \frac{c}{kT} = \gamma; \\ &I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi x - \alpha x^2 - \beta x^3 - \gamma x^4}\, dx. \end{aligned}\right| \quad (3)$$

Dann kann (1) so geschrieben werden:

$$\bar{x} = \frac{1}{I}\frac{dI}{d\xi}.$$

Das Integral I ist auszurechnen. Dazu bilden wir folgenden Differentialausdruck, indem wir unter dem Integralzeichen nach ξ differenzieren:

$$\xi I - 2\alpha\frac{dI}{d\xi} - 3\beta\frac{d^2I}{d\xi^2} - 4\gamma\frac{d^3I}{d\xi^3} =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - 2\alpha x - 3\beta x^2 - 4\gamma x^3) e^{\xi x - \alpha x^2 - \beta x^3 - \gamma x^4} dx.$$

Das Integral rechts ist aber gleich Null, da der Integrand die Ableitung der Funktion

$$e^{\xi x - \alpha x^2 - \beta x^3 - \gamma x^4}$$

ist, und die Konstante γ zunächst als positiv vorausgesetzt werden soll (von dieser Voraussetzung werden wir uns später befreien, indem wir allerdings den Gültigkeitsbereich unserer Formeln einschränken werden).

Das Integral I genügt also als Funktion von $\xi = \frac{eE}{kT}$ einer Differentialgleichung, die wir so schreiben wollen:

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{d\xi} = \frac{\xi}{2\alpha} - \frac{3\beta}{2\alpha}\frac{1}{I}\frac{d^2I}{d\xi^2} - \frac{2\gamma}{\alpha}\frac{1}{I}\frac{d^3I}{d\xi^3}. \quad (4)$$

Diese Differentialgleichung kann durch sukzessive Approximation aufgelöst werden, indem man die mit β und γ multiplizierten Glieder als klein betrachtet. Die erste Näherung wird dadurch erhalten, daß man diese Glieder gleich Null setzt. So bekommt man zunächst

$$\bar{x} = \frac{1}{I_0}\frac{dI_0}{d\xi} = \frac{\xi}{2a} \quad (5)$$

oder nach (3)

$$\bar{x} = \frac{eE}{2a}.$$

Dies entspricht der gewöhnlichen Theorie, welche auf eine Verschiebung führt, die proportional der Feldstärke E, umgekehrt proportional der quasielastischen Kraft a und unabhängig von der Temperatur ist.

Integriert man die Gleichung (5), so bekommt man

$$I_0 = Ce^{\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Die zweite Näherung wird dadurch gefunden, daß dieser Wert von I_0 in die rechte Seite von (4) eingesetzt wird. Führt man die Differentiation aus, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{I_1}\frac{dI_1}{d\xi} = &\frac{\xi}{2\alpha} - \frac{3\beta}{2\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{\xi^2}{4\alpha^2}\right) - \\ &- \frac{2\gamma}{\alpha}\left(\frac{3\xi}{4\alpha^2} + \frac{\xi^3}{8\alpha^3}\right). \end{aligned}\right| \quad (5)$$

Wir werden bei dieser Näherung stehen bleiben.

Nun haben wir bei der Ableitung der Differentialgleichung (4) die Voraussetzung gemacht, daß γ, oder was dasselbe ist, die Konstante c positiv ist. Physikalisch bedeutet das, daß die Kraft, die die Ladung in die Ruhelage zurückzieht, schneller wächst, als die Entfernung aus der Ruhelage. Es muß aber auch der entgegengesetzte Fall, nämlich das langsamere Wachsen der Kraft, zugelassen werden. Diesem Fall würde ein negatives c entsprechen. Dann würde aber unsere Formel (1) ihren Sinn verlieren, da ja sowohl der Zähler wie der Nenner unendlich sein würden. In der Tat ist die Bindung bei negativem c großen Verschiebungen gegenüber unstabil und damit überhaupt kein statistisches Gleichgewicht möglich. Man geht aber der Schwierigkeit aus dem Wege, wenn man die Stabilität dadurch wieder herstellt, daß man in dem Ansatz (2) für die Arbeit noch ein Glied mit einer hohen geraden Potenz von x und einem positiven Koeffizienten hinzunimmt. Die Potenz kann so hoch und der Koeffizient so klein genommen werden, daß dieses Glied erst bei sehr hohen Temperaturen anfängt, eine wesentliche Rolle zu spielen. In der Tat sieht man, wenn man die Bedeutung von ξ nach (3) beachtet, daß die höheren Ableitungen in der Differentialgleichung (4) die Temperatur in einer höheren Potenz enthalten. Es würde aber dem formalen Charakter unseres Ansatzes für die Arbeit A widersprechen, wenn wir dessen Gültigkeit für beliebig große x, d. h. auch für be-

[1]) Der Buchstabe e wird in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht: einmal zur Bezeichnung der Ladung, aber auch für die Basis der natürlichen Logarithmen. Dies dürfte zu keinen Mißverständnissen Anlaß geben.

liebig hohe Temperaturen behaupten wollten. Es ist infolgedessen konsequent, sich von vornherein auf Entwicklungen der Formel (1) zu beschränken, die für nicht allzu hohe Temperaturen gültig sind. In diesem Bereiche aber kann man positive und negative Werte von c mit gleichem Recht zulassen, ohne auf das Glied Rücksicht zu nehmen, welches im Falle eines negativen c zur Erreichung der Stabilität hinzugenommen werden muß. In der Endformel (5) braucht also dieses Glied nicht berücksichtigt zu werden.

§ 3. Temperaturabhängigkeit der Größe $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{\varrho}$. Wir wollen zunächst isotrope Körper in Betracht ziehen und dementsprechend in der Formel (5) $\beta=0$ setzen. Beachtet man die Bedeutung von ξ, a, γ nach (3), so kommt:

$$x=\frac{1}{I_1}\frac{dI_1}{d\xi}=\frac{eE}{2a}\left(1-\frac{3ckT}{a^2}\right)-\frac{c(eE)^3}{4a^4}. \qquad (6)$$

Das letzte Glied dieser Gleichung spielt die Rolle einer kleinen Korrektion, auf die wir weiter unten zurückkommen werden. Vorläufig soll dieses Glied vernachlässigt werden.

Zur Berechnung des elektrischen Moments P der Volumeinheit hat man (6) mit e und der Anzahl N der Ladungen pro Volumeinheit zu multiplizieren. Beachtet man schließlich, daß die auf die Ladung wirkende Kraft E mit der äußeren Kraft E_a nach H. A. Lorentz durch die Gleichung verbunden ist:

$$E=E_a+\frac{4\pi}{3}P=E_a\left(\frac{\varepsilon+2}{3}\right),$$

so hat man

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{2\pi Ne^2}{3a}\left(1-\frac{3ckT}{a^2}\right).$$

Ist N_0 die Anzahl der Ladungen pro Volumeinheit und ϱ_0 die Dichte bei 0^0 C, so ist

$$N=N_0\cdot\frac{\varrho}{\varrho_0}.$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{\varrho_0}{\varrho}=A(1-\delta T), \qquad (7)$$

mit den Werten der Konstanten

$$A=\frac{2\pi e^2N_0}{3a};\qquad \delta=\frac{3ck}{a^2}. \qquad (8)$$

In welchem Maße die Formel (7) durch die Erfahrung bestätigt wird, sollen die folgenden Tabellen zeigen. In diesen werden die experimentell ermittelten Werte von $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{\varrho_0}{\varrho}$ für Methylalkohol, Äthylalkohol, Amylalkohol, Propylalkohol, Benzol und Äthyläther mit den nach (7) berechneten verglichen[1]).

Methylalkohol.

$A=0{,}684;\quad \delta=-0{,}00126.$

Absolute Temperatur	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{\varrho_0}{\varrho}$ exp.	ber.
173	0,831	0,833
223	0,881	0,876
273	0,919	0,919
293	0,935	0,936

Äthylalkohol.

$A=0{,}745;\quad \delta=-0{,}00077.$

193	0,856	0,856
233	0,881	0,878
273	0,901	0,901
295	0,912	0,913

Amylalkohol.

$A=0{,}791;\quad \delta=-0{,}00025.$

173	0,819	0,825
223	0,840	0,835
273	0,845	0,845
293	0,848	0,849

Propylalkohol.

$A=0{,}807;\quad \delta=-0{,}00035.$

213	0,863	0,867
273	0,888	0,885
293	0,889	0,890

Benzol.

$A=0{,}351;\quad \delta=-0{,}00044.$

293	0,3960	0,3960
313	0,4000	0,3995
333	0,4035	0,4030
353	0,4065	0,4065

Äthyläther.

$A=0{,}717;\quad \delta=0{,}00085.$

233	0,571	0,574
273	0,551	0,551
293	0,535	0,538
333	0,519	0,514

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung eine befriedigende. Sie ist übrigens sogar besser, als man sie erwarten dürfte. Es ist nämlich bei einigen Stoffen für die betrachtete Temperatur die Bedingung

$$\delta T \ll 1$$

1) Sämtliches Zahlenmaterial ist aus Landolt-Börnstein, Phys.-chem. Tabellen, entnommen. Die Werte der Dielektrizitätskonstanten rühren von Abegg und Seitz, Abegg, Tangl her. Die entsprechenden Dichten von Pierre, Kopp, Zander.

nur schlecht erfüllt. In diesem Falle würden auch höhere Glieder in dem Ansatze für die Kraft wirksam sein können, als diejenigen, die wir berücksichtigt haben. Die Erfahrung zeigt also, daß z. B. beim Methylalkohol die höheren Glieder so beschaffen sind, daß die lineare Veränderung von $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{\varrho_0}{\varrho}$ mit T auch bei höheren Temperaturen bewahrt bleibt.

§ 4. Abweichung von der Linearität. Es ist unmittelbar klar, daß nach der entwickelten Vorstellung keine genaue Proportionalität zwischen dielektrischer Verschiebung und Kraft bestehen kann. In der Tat enthält Formel (6) neben dem linearen Glied noch ein Glied dritter Ordnung in der Kraft E, welches wir bei den Berechnungen des vorhergehenden Paragraphen vernachlässigt haben.

Die Größenordnung dieses Gliedes läßt sich ermitteln. Kennt man nämlich die Größen A und δ des vorigen Paragraphen, so gestatten die Formeln (8), die Koeffizienten a und c einzeln zu bestimmen, sobald eine plausible Annahme über die Anzahl der Ladungen pro Volumeinheit gemacht ist.

Wir wollen Benzol als Beispiel betrachten. Nimmt man an, daß so viele Ladungen, wie Atome vorhanden sind, jede von der Stärke eines elementaren elektrischen Quantums, so ergibt sich für diese Flüssigkeit

$$a = 13660; \quad c = -2{,}03\cdot 10^{20}.$$

Mit diesen Zahlen ergibt sich, daß, damit das dritte Glied der Gleichung (6) bei Zimmertemperatur nur 1 Proz. des Wertes des ersten Gliedes erreicht, schon eine innere Feldstärke von $3{,}62\cdot 10^4$ abs. E. angewandt werden muß, was einer äußeren Feldstärke von $2{,}51\cdot 10^4$ abs. E. entspricht. Ein so schwacher Effekt kann wohl experimentell nicht aufgefunden werden. Die Abweichung von der Linearität erfolgt in dem Sinne, daß die Polarisation etwas schneller wächst als die Feldstärke.

Amylalkohol würde sich nach unserer Auffassung ganz ähnlich verhalten.

Diesem Resultat widerspricht die Ratnowskysche Beobachtung[1]), wonach bei einer Mischung von Benzol mit Amylalkohol eine meßbare Abweichung von der Linearität, und zwar im entgegengesetzten Sinne als nach unserer Theorie, vorhanden ist. Indessen steht die Beobachtung Ratnowskys bisher ganz vereinzelt da, und es ist abzuwarten, bis mehr sicheres experimentelles Material gewonnen wird.

Die Abweichung von der Linearität ist also nach unserer Theorie nur sehr klein und trotzdem der Temperatureffekt, der von derselben Konstante c abhängt, bedeutend. Dies liegt daran, daß die Ausschläge der Ladungen infolge der Wärmebewegung sehr groß sind, verglichen mit denjenigen Verschiebungen, die durch ein elektrisches Feld bewirkt werden. Davon überzeugt man sich leicht, wenn man beachtet, daß nach Formel (1) in erster Näherung

$$\overline{ax^2} = \frac{kT}{2}$$

ist.

§ 5. Die Pyroelektrizität. Wir wenden uns jetzt zu Kristallen mit ausgezeichneten Richtungen, bei welchen β nicht gleich Null zu sein braucht. Vernachlässigt man in Formel (5) die Glieder mit γ, so wird

$$\bar{x} = \frac{1}{I_1}\frac{dI_1}{d\xi} = \frac{eE}{2a} - \frac{3b}{2a}\left(\frac{kT}{2a} + \frac{(eE)^2}{4a^2}\right). \qquad (9)$$

Behält man nur die Glieder nullter und erster Ordnung in E, beachtet, daß

$$E = E_a + \frac{4\pi}{3}P,$$

und setzt die äußeren Feldstärken E_a gleich Null, so findet man

$$P = \frac{3NebkT}{\frac{2\pi Ne^2}{3a} - 1}. \qquad (10)$$

Hiermit zeigt unser Kristall einen pyroelektrischen Effekt, wobei sich das elektrische Moment in erster Näherung proportional der absoluten Temperatur ergibt. Zu diesem Resultat führt die gewöhnliche statistische Mechanik.

Nun bemerkte mir aber Herr Professor W. Voigt, daß, nach den letzten im Göttinger Institut ausgeführten Messungen, der pyroelektrische Effekt bei tiefen Temperaturen einen von (10) abweichenden Gang zeigt. Es ergeben sich Kurven von der für die Quantentheorie charakteristischen Gestalt.

Die Berechnung auf Grund der Quantentheorie hoffe ich mitzuteilen, sobald das experimentelle Material bekannt wird.

Aus der Größenordnung des pyroelektrischen Effekts findet man nach (10) die Größenordnung der Konstante b. Dann ergibt sich, daß das quadratische Glied der Gleichung stets so klein ist, daß es nie eine Rolle spielen kann. Es ist also nach unserer Theorie eine beobachtbare Polarität der dielektrischen Eigenschaften ausgeschlossen.

Zusammenfassung der Resultate. Eine Veränderung der Größe $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{1}{\varrho}$ mit der Temperatur kann dadurch erklärt werden, daß die Bindung der Ladungen nicht rein quasielastisch

1) Ratnowsky, l. c.

ist. Ist die Arbeit bei der Verschiebung der Ladung um die Strecke x gleich

$$A = ax^2 + cx^4,$$

so bewirkt das Glied vierter Ordnung ein Abnehmen von $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{\varrho}$ mit wachsender Temperatur, wenn $c > 0$ ist, ein Wachsen, wenn $c < 0$.

Die durch das Glied vierter Ordnung bewirkte Abweichung von der Proportionalität zwischen Kraft und Verschiebung ist sehr klein.

Ungerade Glieder im Ansatze für die Arbeit A bewirken einen polaren pyroelektrischen Effekt.

Die durch dieselben Glieder bewirkte Polarität der dielektrischen Eigenschaften ist außerordentlich schwach. Sie wird sich den feinsten Messungen entziehen.

Januar 1914.

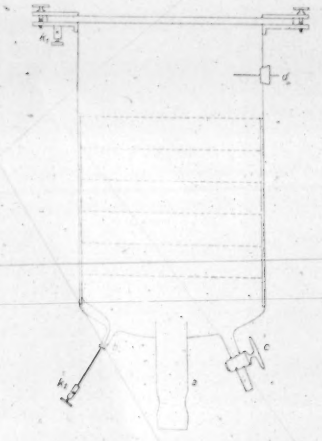
(Eingegangen 4. Februar 1914.)

Ein einfacher Apparat zur Demonstration der Wilsonschen Versuche über die Sichtbarmachung der Bahnen ionisierender Teilchen.

Von Heinrich Mache.

Bei der großen Bedeutung dieser Versuche für die Veranschaulichung der Atomlehre dürfte ein kleiner, bequemer und billiger Apparat nicht unwillkommen sein, der es ermöglicht, sie jederzeit ohne alle weitere Vorbereitung zu demonstrieren.

Ein Glasrohr von ca. 10 cm Länge und 6 cm Durchmesser (vgl. die nachstehende Skizze) ist



oben durch eine Glasplatte, deren Unterseite nach Wilson gelatiniert ist, abgeschlossen. Um ein Abheben der Glasplatte bei Überdruck zu verhindern, ist an das Ende des Rohrs ein niedriger Flanschenring gekittet, gegen den die Platte mittels eines zweiten Ringes und dreier Schrauben gepreßt wird. Zur Erzielung vollkommener Dichtung kann ein Kautschukring eingelegt werden. Am unteren Ende des Rohres sind drei Ansätze angebracht, von denen der mittlere (a) von etwa 1 cm lichter Weite einige Millimeter in das Rohr hineinragt und am anderen Ende mit einem Gasschlauch verbunden wird, der zu einem Kautschukball von ca. 200 cm³ Inhalt führt. Im Glasrohr befindet sich, gut hineinpassend, ein Messingrohr von 6 cm Länge, in welches durch seitliche Schlitze in gleichen Abständen sechs Netze aus geschwärztem Messingdraht von 1 mm² Maschenweite eingesetzt werden. Der Raum zwischen dem obersten Netz und der Glasplatte dient als Nebelkammer. Durch eine seitlich im Glasrohr angebrachte kleine Öffnung (d) wird mittels eines Kautschukstöpsels ein Draht eingeführt, an dessen Ende sich etwas Radiumsalz oder Polonium befindet.

Das Anlegen des entionisierenden Feldes (100 bis 200 Volt) erfolgt bei den Klemmen k_1 und k_2. Die Klemme k_1 ist auf dem Flanschenring festgelötet und stellt mittels eines Stanniolstreifens eine leitende Verbindung mit dem Gelatinebelag der Glasplatte her. Die Klemme k_2 sitzt am Ende eines Drahtes, der durch den zweiten Ansatz (b) zu den Netzen führt. Der dritte Ansatz (c), der durch einen Hahn geschlossen wird, dient zum Einfüllen einiger Tropfen Wasser in den Boden des Rohres oder, wenn der Apparat in horizontaler Lage verwendet werden soll, zum Befeuchten von etwas Filterpapier oder Watte, die dort eingelegt wird. Die Beleuchtung (Bogenlampe) erfolgt von der Seite und der Beobachter blickt durch die Glasplatte gegen die geschwärzten Netze.

Wird der Kautschukball zusammengedrückt und wieder losgelassen, so bildet sich in der Kammer zunächst gewöhnlicher Staubnebel, der durch mehrmalige Wiederholung dieser Operation sich leicht ganz beseitigen läßt. Wird jetzt für den eigentlichen Versuch der Ball stark zusammengepreßt, etwas gewartet, damit die in der Nebelkammer bei der Kompression über den Netzen entstandenen kleinen Wirbel sich beruhigen, so zeigt sich beim plötzlichen Loslassen des Balles scharf und geradlinig das Nebelbild der α-Strahlen. Die Expansion der Luft in der Nebelkammer erfolgt also nahezu wirbellos. Zum sicheren Gelingen des Ver-

suches ist es vorteilhaft, nach dem Zusammendrücken des Balls den Schlauch zwischen den Fingern abzuklemmen, den Ball ganz frei zu geben und die Expansion durch plötzliches Loslassen des Schlauches vorzunehmen.

Der Versuch kann in rascher Folge beliebig oft wiederholt werden, der kleine Apparat ist stets unmittelbar gebrauchsfertig und will man photographieren, so kann ein T-Stück eingeschaltet und der Ball zugleich zum rechtzeitigen Lösen des Momentverschlusses verwendet werden. Übrigens lassen sich die Versuchsbedingungen innerhalb weiter Grenzen variieren, die Zahl der Netze vermindern, das Glasrohr verkürzen, ohne daß die Strahlen hierdurch wesentlich an Schärfe einbüßen, oder krumm werden. Ja selbst ganz ohne Netze kann die Erscheinung in dem oben beschriebenen Rohr noch recht gut wahrgenommen werden, wofern nur zwischen Messingrohr und Glasplatte ein elektrisches Feld vorhanden ist.

Physikalisches Laboratorium der technischen Hochschule in Wien.

(Eingegangen 5. Februar 1914.)

Zur Theorie des Glimmstroms. II [1]).

Von Ragnar Holm.

§ 4. Über die Abhängigkeit der positiven Säule eines in einem zylindrischen Rohr verlaufenen Glimmstromes vom Rohrdurchmesser.

Wertvolle Anhaltspunkte für Berechnungen zum Thema dieses Paragraphen erhält man durch Ähnlichkeitsbetrachtungen folgender Art.

Wir denken uns zwei Glimmentladungsröhren I und II, von denen I einen $a$mal größeren Durchmesser als II hat und suchen die Bedingungen dafür, daß ein Stück der Glimmsäule in I einem gewissen Stück der Glimmsäule in II ähnlich ist, und daß homologe Punkte in beiden Rohrteilen gleiche Potentiale besitzen. Die Indizes 1 und 2 mögen bei den folgenden Auseinandersetzungen auf die Vorgänge in den betreffenden Röhren I und II hinweisen.

Die geometrische Ähnlichkeit der Vorgänge (1) und (2), z. B. die Ähnlichkeit der Schichten, bezeichne ich als Gesetz A.

Eine vollständige Ähnlichkeit der beiden betreffenden Vorgänge würde verlangen, daß die Molekküldurchmesser und die freien Weglängen im Rohr II $a$mal kleiner sein sollen als im Rohr I. Von der Forderung betreffend den Molekküldurchmesser sehen wir ab, behalten nur die Forderung, daß die freien Weglängen im Rohr I $a$mal größer sein sollen als im Rohr II, und bezeichnen sie als Bedingung B. Es lassen sich nun einige interessante Beziehungen herleiten.

Aus der Bedingung B folgt, daß zwischen den Gasdrucken B_1 und B_2 die

Beziehung C: $\quad B_2 = aB_1$

besteht.

Bedeutet nun ϱ Ladungsdichte, r Entfernung vom Aufpunkt, dv Volumenelement und V elektrisches Potential, so ist das Potential eines Punktes im Rohre I

$$V_1 = \int \frac{\varrho_1}{r_1} dv_1$$

und im Rohr II

$$V_2 = \int \frac{\varrho_2}{r_2} \cdot dv_2 .$$

Sind die Punkte homolog, so ist laut einer oben gemachten Voraussetzung

$$V_1 = V_2 .$$

Jedem r_2 entspricht nun ein $r_1 = ar_2$, und jedem dv_2 ein $dv_1 = a^3 dv_2$. Es kann also V_1 geschrieben werden:

$$V_1 = \int \frac{\varrho_1}{ar_2} \cdot a^3 dv_2 ,$$

und es gilt:

$$\int \frac{a^2 \cdot \varrho_1}{r_2} \cdot dv_2 = \int \frac{\varrho_2}{r_2} \cdot dv_2 ,$$

so daß für alle homologen Punkte gültig ist die Beziehung D:

$$a^2 \varrho_1 = \varrho_2 .$$

Ionen und Elektronen an homologen Punkten haben in den beiden Röhren I und II natürlich dieselbe Geschwindigkeit, da sie auf homologen Weglängen von gleichgroßen Potentialdifferenzen in Bewegung gesetzt worden sind. Die Stromdichte J ist gleich dem Produkt aus Ladungsdichte und Ladungsgeschwindigkeit. Aus der Beziehung D folgern wir also die Beziehung E:

$$a^2 J_1 = J_2 ,$$

und daraus, da ja der Querschnitt von Rohr I a^2mal größer ist als derjenige des Rohres II die Beziehung F: Die Stromstärken sind in den Röhren I und II gleich.

Wir werden die abgeleiteten Beziehungen A bis F ausgezeichnet an experimentellen Daten bestätigt finden.

Was zuerst die geschichtete Glimmsäule bei schwachen Strömen anlangt, so liegen in meiner Abhandlung R. H.[1]) brauchbare Beobachtungen

1) I: Diese Zeitschr. 15, 241—249, 1914.

1) R. Holm, Göttinger Abhandl., neue Folge, Bd. 6, Nr. 2, 1908. Ich bezeichne diese Abhandlung mit R. H.

darüber vor. Die dortigen Tabellen 1 und 2 enthalten Beobachtungen an zwei mit Wasserstoff gefüllten Röhren von 40 bzw. 20,3 mm innerem Durchmesser. Die Beobachtungen mit mehr als 1 mm Druck dürften, was den Reinheitsgrad anlangt, gut miteinander vergleichbar sein[1]). Es wäre nun nach den Gesetzen A bis F zu erwarten, daß die Beobachtungen (1) am weiteren Rohr gut hineinpassen in die Diagramme, die man auf Grund der Beobachtungen (2) am engeren Rohr zeichnen kann, wenn die Werte (1) mit folgenden Koeffizienten multipliziert werden:

Längen	mit	0,51,
Potentiale	„	1,00,
Stromstärken	„	1,00,
Drucke	„	1,97.

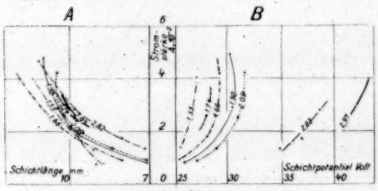


Fig. 2.

Die Diagramme A und B (Fig. 2) zeigen, wie gut die Beobachtungen in den verschiedenen Röhren sich mit Hilfe der obigen Koeffizienten (mit einer Ausnahme: als Druckkoeffizient wurde 1,9 statt 1,97 gebraucht) aufeinander reduzieren lassen. In den Diagrammen geben die die Kurven unterbrechenden Zahlen die den Kurven angehörigen Drucke in mm Hg an. Die durch Punkte markierten Beobachtungen gehören zum Rohr (2), die Kreuze beziehen sich auf die reduzierten Beobachtungen vom Rohr (1).

Wegen Beobachtungen an der geschichteten Glimmsäule bei großen Stromstärken nehme ich Arbeiten von Wehner und Neubert[2]) vor. Die Wehnersche Kurventafel III (S. 64) und die Neubertsche Kurventafel II (S. 1474) liefern tatsächlich direkt den Beweis dafür, daß die zu großen Stromstärken gehörenden Schichtenlängen in verschiedenen Röhren sich so verhalten, daß den Beziehungen A und C Genüge geleistet wird. Den entsprechenden Beweis für die Schichtenpotentiale liefern allerdings die Wehnerschen Beobachtungen nicht recht deutlich. Es kämen dafür die Daten seiner Kurventafel V, S. 79, in Frage, die aber, wie Wehner selbst bemerkt, daran leiden, daß die Gasfüllungen sehr verschiedenen Reinheitsgrad gehabt haben, so daß die Beobachtungen untereinander nicht gut vergleichbar sind. Auch bei Neubert fehlen für diesen Beweis geeignete Beobachtungen.

Der in Stickstoff verlaufende Glimmstrom ist empfindlicher gegen Verunreinigungen, als der in Wasserstoff verlaufende. Darauf wird es wohl beruhen, daß sowohl meine wie Wehners Beobachtungen mit Stickstoffüllungen nicht so schöne Diagramme ergeben haben, wie die Beobachtungen mit Wasserstoffüllungen. Die Beobachtungen an Stickstoff scheinen aber mit den obigen Ausführungen auch gut vereinbar zu sein.

Wegen der Kontrolle der Beziehungen A bis F im Falle einer ungeschichteten positiven Säule und kleiner Stromdichte werde ich Gebrauch von Angaben von R. Reiger[1]) machen.

Wenn X den Potentialgradient in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ und i den Strom in Milliampere bedeutet, so gilt nach Reigers Berechnungen für nicht zu große Drucke und Stromstärken:

$$\sqrt{X} = a + \frac{b}{1+i},$$

wobei $\frac{a}{\sqrt{p}}$ ziemlich unabhängig ist sowohl vom Druck p als auch vom Durchmesser d des betreffenden Rohres. Die Größe b ist, nach Reigers Tabellen Nr. 37 bis 41 zu beurteilen, vom Druck recht unabhängig, dagegen in der Weise von d abhängig, daß

$$b \cdot d^m = \text{const}$$

wird, wo

$$1 > m > \frac{1}{2}$$

ist. Die Größe a ist in den angegebenen Fällen 5- bis 10mal größer als $\frac{b}{1+i}$.

Wir lassen nun die Gleichung:

$$\sqrt{X_1} = a_1 + \frac{b_1}{1+i}$$

für ein gewisses Rohr (1) Gültigkeit haben. In einem anderen Rohr (2), dessen lineare Dimensionen εmal kleiner sind als bei (1), müssen wir nach dem Obigen einen ähnlichen Stromvorgang wie in (1) mit gleichen Potentialen in homologen Punkten haben, wenn im Rohr (2) der Druck $p_2 = \varepsilon p_1$ ist, während die Stromstärke $= i$ bleibt.

1) Mehrere Eigentümlichkeiten der Beobachtungen bei niedrigeren Drucken dürften direkte Folgeerscheinungen der Verunreinigungen im Gas sein, und sind deshalb gegen Unterschiede im Reinheitsgrad äußerst empfindlich.

2) F. Wehner, Ann. d. Phys. **32**, 49, 1910; P. Neubert, Ann. d. Phys. **42**, 1454, 1913.

1) R. Reiger, Sitz.-Ber. d. Phys.-Med. Soz. in Erlangen **37**, 1—130, 1905. Reiger berücksichtigt Messungen von verschiedenen Forschern.

Für die positive Säule im Rohr (2) würde demnach gelten

$$\sqrt{X_2} = a_2 + \frac{b_2}{1+i},$$

wo aber $X_2 = \varepsilon X_1$ sein muß, eine Bedingung, die befriedigt wird, wenn:

$$a_2 = a_1\sqrt{\varepsilon} \quad \text{und} \quad b_2 = b_1\sqrt{\varepsilon}$$

sind.

Aus dem oben erwähnten experimentellen Gesetz $\frac{a}{\sqrt{p}} = \text{const}$ ergibt sich:

$$\frac{a_1}{\sqrt{p_1}} = \frac{a_2}{\sqrt{p_2}} = \frac{a_2}{\sqrt{p_1\varepsilon}};$$

oder $a_2 = a_1\sqrt{\varepsilon}$ gerade so, wie die Theorie verlangt.

Laut den experimentellen Gesetzen gilt weiter:

$$b_2 d_2^m = b_1 d_1^m = b_1 (d_2\varepsilon)^m$$

oder:

$$b_2 = b_1 \cdot \varepsilon^m.$$

Wäre $m = \frac{1}{2}$ gewesen, so wäre hier den Gesetzen A bis E vollständig Genüge geleistet worden. Nun ist zwar m etwas größer als $\frac{1}{2}$, da aber, wie hervorgehoben, der Term $\frac{b_2}{1+i}$ verhältnismäßig klein ist, so können wir behaupten, daß die Gesetze A bis F mit guter Annäherung auch hier gelten.

Bei den größten Stromdichten, die Matthies und Struck[1]) brauchten, dürfte der E-Effekt seinen Sättigungswert erreicht haben, und man muß erwarten, daß das Potentialgefälle pro freie Weglänge bei bestimmter Temperatur einen vom Druck und vom Rohrdurchmesser unabhängigen Wert annimmt. Matthies und Struck veranschaulichen in ihrer Fig. 4 die Abnahmegeschwindigkeit des Potentialgradienten mit steigender Stromstärke. Die betr. Größe wird bei großen Stromstärken recht klein, ohne sich doch deutlich dem theoretischen Endwert Null asymptotisch zu nähern. Diese Abweichung von dem theoretischen Gesetz könnte aber nur scheinbar sein und würde vielleicht verschwinden, wenn die betreffenden Beobachtungen mit Berücksichtigung der Temperatur auf Gasdichten statt auf Drucke bezogen würden.

Die oben für die positive Säule hergeleiteten Gesetze A bis F haben auch außerhalb dieser Säule eine gewisse Bedeutung. Das Diagramm Fig. 3 ist nach demselben Prinzip wie die Diagramme Fig. 2 gezeichnet worden. Es bezieht sich auch auf dieselben Tabellen in meiner Abhandlung R. H. Die ausgezeichnete Übereinstimmung der ausgezogenen und der gestrichelten Kurven wurde durch folgende Reduktionskoeffizienten erreicht, für

Längen	0,52,
Stromstärken	1,2,
Drucke	1,8.

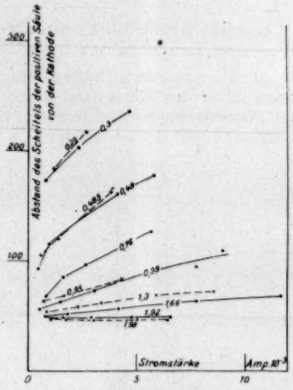


Fig. 3.

Als im § 3 von der Stabilität der Schichtung die Rede war, habe ich nur die Bedingung des kleineren Potentialgradienten in derjenigen Säulenart, die bestehen bleibt, besprochen. Es ist von vornherein klar, daß bei stabiler Schichtung das Verhältnis $\frac{\text{Schichtdurchmesser}}{\text{Schichtlänge}}$ nicht beliebig groß werden darf. Damit hängt zusammen, daß man in einem weiten Rohr von vornherein größere Schichtlänge erwarten muß als in einem engeren unter sonst gleichen Umständen. Im allgemeinen hat man natürlich auch eine Abnahme der Schichtlänge bei wachsendem Druck zu erwarten. Im Falle so großer Stromdichte, daß die Schichtlänge l von weiterer Vergrößerung des Stromes unabhängig ist, ist l eine recht einfache Funktion vom Druck p und dem Rohrdurchmesser d. Es gilt nämlich nach Goldstein[1]) bei konstantem d

$$l = k_1 \cdot p^{-m},$$

und nach Wehner[2]) bei konstantem p

$$l = k_2 d^n,$$

wobei, laut der von Wehner gefundenen Beziehung:

1) W. Matthies und H. Struck, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**, 83, 1912.

1) E. Goldstein, Berl. Ber. 1881, S. 877.
2) F. Wehner, Ann. d. Phys. **32**, 65, 66, 1910.

$$\log \frac{l}{d} + m \log \overline{p\,d} = k_3,$$

welche einen Ausdruck für meine obigen Gesetze A und C gibt,

$$m + n = 1$$

sein muß, d. h.

$$l = k \cdot p^{-m} \cdot d^{1-m}\ ^{1}),$$

wo natürlich $0 < m < 1$ ist.

§ 5. Über das durch Elektronenstoß erregte Leuchten der Gase.

Die im § 1 erwähnten Untersuchungen des Verfassers über den Gegenstand dieses Paragraphen 5 wurden hauptsächlich in einem in Fig. 4

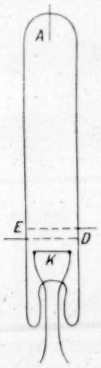


Fig. 4.

abgebildeten, 3,5 cm weiten Rohr ausgeführt. K bedeutet eine aus fünf parallelen mit Erdalkalioxyden bestrichenen Platinbändern bestehende Wehneltkathode. 3 mm oberhalb K befindet sich das Platindrahtnetz D und 2 mm oberhalb D das Platinnetz E. K kann durch etwa 12 Amp. bei 0,5 Volt Spannungsabfall in den Platinbändern auf helle Rotglut gebracht werden und stellt dabei eine sehr leistungsfähige Elektronenquelle dar, deren Elektronenabgabe durch Veränderung des Heizstromes variiert werden kann. A ist eine als Anode benutzbare Elektrode.

Das Netz E wurde über ein Mikroamperemeter mit D verbunden. Beide Netze wurden auf einer V Volt höheren (variablen) Spannung als K [2]) gehalten. Die von K ausgehenden Elektronen erhielten also zwischen K und D eine der Spannung V entsprechende Geschwindigkeit und erregten, wenn diese groß genug war, um die Netze herum und besonders zwischen ihnen ein Leuchten. Bei den Vorversuchen hatte ich einen zu großen Abstand zwischen D und E. Es kam dann bei kleinen V vor, daß die Elektronen das Netz E nicht erreichten, sondern schon unterhalb E absorbiert wurden und als Ionen eine Raumladung bildeten. Ich konnte nämlich durch Sondieren feststellen, daß das Potential von D nach oben mindestens ebenso steil sank wie von D nach K zu. Bei der schließlich gebrauchten Anordnung dürfte aber das Feld zwischen D und E ziemlich $= 0$ gewesen sein, und es kann damit gerechnet werden, daß das Leuchten dort von Elektronen erzeugt wurde, die ein Geschwindigkeitspotential $= V +$ ein in K gewonnenes Austrittspotential besaßen, vorausgesetzt, daß keine störenden elektrischen Doppelschichten an den Netzen hafteten.

Die niedrigsten V-Werte V_0, welche noch ein Leuchten im Gase zwischen D und E herbeiführten, wurden ausprobiert, und zwar unter sehr variierten Bedingungen, indem der Druck in H_2 und N_2 zwischen 0,03 und 0,3 mm Hg, in He zwischen 0,3 und 1 mm Hg und die Stärke des Elektronenstromes nach E [1]) zwischen 0,3 und 4 Milliampere variiert wurden. Bei einigen Versuchen wurde das Netz D durch Kathodenzerstäubung (Stromstärke etwa 30 Milliampere während $^1/_4$ Stunde) vorbehandelt, ehe die Messungen vorgenommen wurden. Die V_0-Werte ließen sich überraschend scharf bestimmen. Wenn nur das Gas sehr rein gehalten wurde, stimmten die verschiedenen Beobachtungen unabhängig von dem Druck und der Stromstärke auf $\pm 0{,}1$ bis $+0{,}3$ Volt miteinander überein. Nur nach der Reinigung des Netzes durch Kathodenzerstäubung kam eine deutliche, aber kleine Verminderung (etwa 0,3 Volt) der V_0-Werte zum Vorschein. Die hier unten in der Tabelle 1 angegebenen V_0-Werte sind Mittel aus Bestimmungen ohne Vorbehandlung des Netzes, vermindert um 0,3 Volt. Für eine eventuelle Ausgangsgeschwindigkeit beim Verlassen der Wehneltkathode kann ich nicht korrigieren.

Die untersuchten Gasfüllungen waren sehr gut gereinigt, und wurden durch in flüssige Luft tauchende U-Röhren vor Hg- und anderen Dämpfen geschützt. Besondere spektroskopische oder andersartige Reinheitsproben hatte ich leider keine Gelegenheit auszuführen. Wenn etwas unreines Gas zugelassen wurde, verminderten

1) Vgl. Wehner, loc. cit., und Neubert, loc. cit.
2) Vom negativen Ende des K gerechnet.

1) Der Elektronenstrom nach E wurde durch den am Mikroamperemeter zwischen D und E abgelesenen Strom gemessen. D war direkt an die Spannung V angeschlossen.

sich die V_0-Werte in H_2 und N_2 bis um 2 Volt, in He bis um 8 Volt.

Tabelle 1.

Gas	V_0-Werte des Verf.	Kleinste lichterregende Geschwindigkeitspotentiale nach Gehrcke und Seeliger [1])
H_2	14,8 Volt	29 Volt
N_2	11,7 „	29 „
He	22,5 „ [2])	26 „

Die Übereinstimmung zwischen den Angaben von mir und denjenigen von Gehrcke und Seeliger ist recht schlecht. Es ist aber zu beachten, daß Gehrcke und Seeliger in ihrer Arbeit keiner genauen Bestimmung dieser Werte nachstrebten.

Franck und Hertz[3]) geben für H_2, N_2 und He folgende Ionisierungsspannungen an:

in H_2 11 Volt,
N_2 7,5 „ ,
He 20,5 „ .

Die V_0-Werte sind in ihrer Größe den Ionisierungsspannungen sehr ähnlich und zeigen bei den untersuchten Gasen denselben Gang wie jene, so daß die Vermutung eines nahen Zusammenhanges zwischen beiden Größen sich aufdrängt.

Es ist durch diese Untersuchung, wie im § 2 schon erwähnt wurde, bewiesen, daß jedenfalls bei gewissen für die Glimmsäule passenden Drucken und Elektronenstromdichten ein deutliches Leuchten nur dann erregt wird, wenn die Elektronen mehr als die kleinstmögliche Ionisierungsspannung besitzen, denn die größeren, bei meinen Versuchen beobachteten Stromstärken zwischen D und E würden in einer normalen kontinuierlichen Glimmentladung im betreffenden Rohr bei den bezüglichen Drucken vorkommen können.

Von einigen Versuchen, die ich mit einem in der Fig. 4 abgebildeten ähnlichen Rohr, bei dem das Netz E fehlte, ausgeführt habe, seien zwei erwähnt.

Fig. 5 zeigt eine Aufnahme einer leuchtenden Säule, so wie sie oberhalb D in Wasserstoff oder Stickstoff von etwa 0,05 mm Hg Druck entstand, wenn die Spannung V einen Wert zwischen 25 und 35 Volt hatte. Durch Sondierungen wurde festgestellt, daß die Spannung in dieser Säule nach oben hin abnahm; dies ist die Wirkung einer negativen Raumladung, die sich in der oberen Hälfte des Rohres ausbildete. Derartige Säulen, von denen die Figur ein besonders langes Exemplar zeigt, dürften von Elektronen erzeugt werden, welche in dem Felde oberhalb D eine Wurfbahn durcheilen, etwa so wie bei den Gehrcke-Seeligerschen Versuchen. Die Farbenfolge von oben nach unten ist dieselbe wie in positiven Schichten von der Kathode nach der Anodenseite.

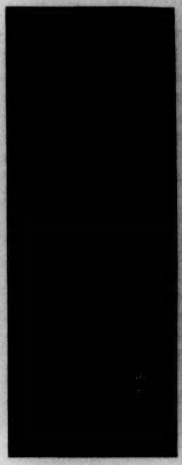


Fig. 5.

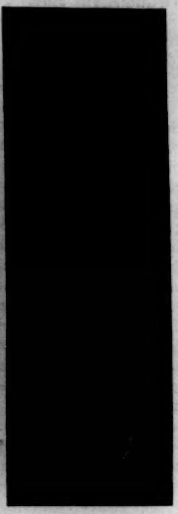


Fig. 6.

Die Fig. 6 zeigt eine Aufnahme eines Stromvorganges, bei dem A als Anode diente. V war von der Größenordnung 20 Volt. Der Glimmstrom besteht in diesem Falle eigentlich aus lauter positiven Schichten. Die Schichten haben nämlich alle dieselbe Farbe und dasselbe Spektrum. Die unterste Schicht ist nur, teilweise auf Grund einer Erweiterung des unteren Rohrendes, etwas größer als die anderen. Eigentliche negative Gebilde sind hier nicht nötig gewesen, weil ohne sie die für den Strom nötige Elektronenzahl von der Wehneltkathode geliefert wurde.

(Eingegangen 11. Februar 1914.)

1) E. Gehrcke und R. Seeliger, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**, 341, 1912.
2) Gemessen in strömendem sehr reinem Gas.
3) J. Franck und G. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 34, 1913.

Grundlagen einer relativistischen elektromagnetischen Gravitationstheorie.

Von Jun Ishiwara.

§ 1. Einleitung.

Von den Arbeiten, in denen das Problem der Gravitation vom Standpunkt der modernen physikalischen Anschauung behandelt ist, seien hier die von Einstein[1]), Abraham[2]), Nordström[3]), Mie[4]) und von Mc Laren[5]) hervorgehoben. Während die drei letzteren Autoren keine eingehendere Erklärung über die Natur des Gravitationspotentials versucht haben, ist bei Einstein und Abraham die Gravitationswirkung als von den raumzeitlichen Änderungen der Lichtgeschwindigkeit verursacht gedeutet. Nicht nur für das Erreichen eines einheitlichen Weltbildes ist diese Hypothese höchst wertvoll, sondern es scheint mir auch in der Tat, unseren gegenwärtigen Kenntnissen nach, kaum eine andere Hypothese über die physikalische Natur der Gravitation möglich. Die Theorie, die durch die genannte Hypothese charakterisiert ist, möchte ich der Kürze halber die „elektromagnetische" Gravitationstheorie nennen.

Bei seiner elektromagnetischen Gravitationstheorie hat Einstein schon von vornherein die Gültigkeit der Lorentztransformation für die Raumzeitkoordinaten, die für die frühere Relativitätstheorie so wesentlich war, aufgegeben, und bei den neueren Arbeiten eine leider nicht gelöste Verallgemeinerung derselben angenommen. Auch der Umstand, daß die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes, die in der zitierten Arbeit von Abraham gegeben wurden, zwar im unendlich kleinen Raumgebiete den Lorentztransformationen gegenüber invariant sind, aber nicht mehr im Einklang mit den Prinzipien der Dynamik stehen, hat Abraham bekanntlich dazu geführt, den ernsten Einwand gegen die ganze Relativitätstheorie zu erheben. Es scheint somit sich zu ergeben, daß die Gravitationstheorie, damit sie doch mit dem Relativitätsprinzip vereinbar sein kann, wenigstens nichts mit der Veränderlichkeit der Lichtgeschwindigkeit zu tun hat. So sind z. B. die relativistischen Theorien von Nordström und Mie ohne diese Hypothese aufgestellt, und die Natur des Gravitationspotentials ist darum vollkommen unerklärt gelassen.

Ein großes Interesse für die elektromagnetische Gravitationstheorie, die sich so zugunsten des elektromagnetischen Weltbildes zu ergeben hat, veranlaßt mich zum Versuch einer einfachen, relativistischen, elektromagnetischen Gravitationstheorie. Denn es scheint mir, daß die von Abraham getroffene theoretische Unzulänglichkeit in den Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes in der Tat verschwinden müßte, sobald man sie aus dem dynamischen Grundprinzip, welches sich der relativtheoretischen Idee entsprechend formulieren läßt, herleiten würde. Die Grundlagen der Theorie, die mir auf diese Weise systematisch aufzubauen gelungen ist, möchte ich im folgenden kurz darlegen.

§ 2. Die Grundannahmen.

Die physikalischen Annahmen, auf denen die vorliegende Theorie überhaupt beruht, sind in die drei folgenden zusammengefaßt:

I. Das Prinzip der Relativität des infinitesimalen Raumzeit-Systems. Darunter verstehen wir die Invarianz eines Elementes:

$$d\Sigma = i\,c\,dv\,dt \qquad (1)$$

der vierdimensionalen Raumzeitwelt gegenüber den Lorentztransformationen. Dabei ist dv das Volumelement des physikalischen Raumes, dt das Zeitelement, c der Raumzeitparameter, der als die Geschwindigkeit des elektromagnetischen Vorganges im leeren Raume zu verstehen ist. Übrigens ist $i = \sqrt{-1}$.

II. Die Hypothese über die Masse und das Gravitationsfeld. Wir nehmen den Raumzeitparameter c als eine Funktion von Ort und Zeit an und denken uns seinen Wert bis auf eine additive Konstante durch die Verteilung der Materie in der Raumzeitwelt bestimmt. Diese Hypothese führt uns nämlich dazu, das Potential des von der Materie verursachten Kraftfeldes, also des Gravitationsfeldes überhaupt, durch die Größe c bestimmt zu betrachten.

Wir schreiben jeder Energie des Gravitationsfeldes eine Masse zu, deren Ruhedichte ν^1 definiert wird durch

$$\nu^1 = \frac{1}{2\alpha c}(\diamond c)^2, \qquad (2)$$

wo $\diamond$ den Gradienten von c in der vierdimensionalen Raumzeitwelt bedeutet, so daß also

$$(\diamond c)^2 = \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial t}\right)^2$$

ist. α ist eine universelle Konstante.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **35**, 898, 1911; **38**, 355, 443 und 1059, 1912; A. Einstein und M. Großmann, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, Leipzig, 1913; A. Einstein, diese Zeitschr. 14, 1249, 1913; **15**, 108, 1914.

2) M. Abraham, diese Zeitschr. **13**, 1, 310 und 793, 1912; Ann. d. Phys. (4) **38**, 1056; **39**, 444, 1912.

3) G. Nordström, diese Zeitschr. **13**, 1126, 1912; Ann. d. Phys. (4) **40**, 856; 42, 533, 1913.

4) G. Mie, Ann. d. Phys. (4) **40**, 1, 1913; diese Zeitschr. 15, 115 (263), 1914.

5) S. B. Mc Laren, Phil. Mag. (6) **26**, 636, 1913.

Jedes elementare Teilchen der Materie verstehen wir als einen Körper von unendlich kleinem Volumen, worin die Feldquelle von einer bestimmten endlichen Masse zusammengedrängt ist, und welcher also sich nahezu wie ein singularer Quellpunkt verhält. Die im Innern des Teilchens lokalisierte konstante Masse nennen wir die materielle Masse, deren Dichte durch ν bezeichnet werden soll.

Die Dichte der gesamten Masse eines physikalischen Systems ist gleich

$$\mu = \nu + \nu^1 . \tag{3}$$

III. Das Prinzip der kleinsten Wirkung. Das besagt: Die wirklichen physikalischen Vorgänge finden immer derartig statt, daß die erste Variation des Wirkungsintegrals:

$$W = \int h \, d\Sigma_r = -\int \mu c \, d\Sigma \tag{4}$$

verschwindet. Wir nennen h die Dichte der Wirkungsgröße.

§ 3. Dynamische Prinzipien.

Wir betrachten ein materielles elementares Teilchen, dessen gesamte Ruhemasse

$$m_0 = \int \mu \, dv_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}} \int \mu \, dv \tag{5}$$

ist. Hierbei ist dv_0 das Ruhevolumenelement, $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens. Indem wir für c seinen Mittelwert innerhalb des verschwindend kleinen Volumens des Teilchens ersetzen, dürfen wir den Faktor $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}$ vor dem Integral schreiben.

Das Wirkungsprinzip wird dann so geschrieben:

$$\delta W = -\delta \int m_0 c \, ds = 0, \tag{6}$$

wo

$$ds = |d\mathfrak{r}| = \sqrt{(d\mathfrak{r})^2 - c^2 dt^2} \tag{7}$$

ein lineares Element des Weltraumes ist.

Ein physikalisch abgeschlossener Körper ist nun durch einen bestimmten konstanten Wert der Wirkungsgröße zu charakterisieren, d. h. durch die konstante Größe $m_0 c$. Der zeitliche Vorgang bei einem solchen Körper muß also nach dem Gesetz:

$$\delta \int ds = 0 \tag{8}$$

vor sich gehen. Dieses letzte aber entspricht gerade dem Prinzip der geradesten Bahn von Hertz.

Setzt man

$$H = \int h \, dv, \tag{9}$$

so nimmt das Wirkungsprinzip die Hamiltonsche Form an:

$$\delta \int H c \, dt = 0 . \tag{10}$$

Die Lagrangesche Gleichung läßt sich bekanntlich daraus ableiten, wenn man sich eine virtuelle Verschiebung $\delta\mathfrak{r}$ ausgeführt denkt. Dabei hat man freilich nicht dt, sondern die vierte Koordinate des Weltraumes $ic\,dt$ unvariiert zu lassen. Indem man noch

$$\delta\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\delta\mathfrak{r}),$$

oder

$$\delta\mathfrak{v} = \frac{d}{dt}(\delta\mathfrak{r}) + \frac{\mathfrak{v}}{c}(\delta\mathfrak{r}, \nabla)c$$

beachtet und H als Funktion von $\mathfrak{v}$ und c betrachtet, erhält man

$$\delta H = \left(\delta\mathfrak{v}, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{\partial H}{\partial c}(\delta\mathfrak{r}, \nabla)c =$$
$$= \left(\frac{d}{dt}(\delta\mathfrak{r}), \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{1}{c}\left(\mathfrak{v}, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}\right)(\delta\mathfrak{r}, \nabla)c +$$
$$+ \frac{\partial H}{\partial c}(\delta\mathfrak{r}, \nabla)c .$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (10) ein und führt partielle Integration wie gewöhnlich aus, so findet man die Bedingung für das Verschwinden des Integrals so:

$$\frac{d}{dt}\left(c\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}\right) = c\left\{\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{\partial H}{\partial c}\right\}\nabla c. \tag{11}$$

Diese ist die relativistisch formulierte Lagrangesche Impulsgleichung. Die demgegenüberzustellende Energiegleichung kann man aus (11) und aus der Funktionsbeziehung:

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{dc}{dt}\frac{\partial H}{\partial c}$$

erhalten. Es ist also

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{v}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}} - H\right) &= \mathfrak{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}\right) - \frac{dc}{dt}\frac{\partial H}{\partial c} = \\ &= -\left\{\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{\partial H}{\partial c}\right\}\frac{\partial c}{\partial t} . \end{aligned}\right| \tag{12}$$

Wird gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G} &= c\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}, \; U = c\left(\mathfrak{v}\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}} - H\right) = \mathfrak{v}\mathfrak{G} - cH, \\ \mathfrak{K} &= c\left\{\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{\partial H}{\partial c}\right\}\nabla c, \\ i\mathfrak{K}_t &= c\left\{\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{\partial H}{\partial c}\right\}\frac{\partial c}{ic\,\partial t}, \end{aligned}\right| \tag{13}$$

so gehen die Gleichungen (11) und (12) über in die übliche Form:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{U}{c}\right) = \mathfrak{K}_t . \tag{14}$$

$\mathfrak{K}$ und $i\mathfrak{K}_t$ können als die räumliche bzw. zeitliche Komponente eines Vierervektors gedeutet werden. Indem wir

$$\int \boldsymbol{k}\, d\boldsymbol{\Sigma} = \int \left\{ \left(\frac{\mathfrak{v}}{c}, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}} \right) + \frac{\partial H}{\partial c} \right\} \cdot (\diamond c) \cdot ic\, dt \quad (15)$$

setzen, wollen wir den Vierervektor $\boldsymbol{k}$ als die Dichte der ponderomotorischen Vierer-kraft bezeichnen.

Sind $\mathfrak{g}$ und u die räumliche Dichte der Bewegungsgröße $\mathfrak{G}$ bzw. der Energie U, so kann man sich in bekannter Weise von der Gültigkeit der Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{d\mathfrak{G}}{dt} i\, dt &= \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{g}\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{g}\frac{\mathfrak{v}_y}{c}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{g}\frac{\mathfrak{v}_z}{c}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} \right\} d\boldsymbol{\Sigma}, \\ \int \frac{d}{dt}\left(\frac{U}{c}\right) i\, dt &= \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\mathfrak{v}_x}{c^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\mathfrak{v}_y}{c^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\mathfrak{v}_z}{c^2}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{c}\right) \right\} d\boldsymbol{\Sigma} \end{aligned}\right| \quad (16)$$

überzeugen. Wir können aber daraus schließen, daß dem Vierervektor $\boldsymbol{k}$ ein Welttensor $\boldsymbol{L}$ gegenübergestellt zu werden vermag. Also ist

$$\int \boldsymbol{k}\, d\boldsymbol{\Sigma} = \int (\boldsymbol{L}, \boldsymbol{n})\, dS, \quad (17)$$

wo dS ein Element der dreidimensionalen Begrenzung des Weltraumes $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{n}$ den Einheitsvierervektor nach der äußeren Normale von dS bedeutet. $\boldsymbol{L}$ nennen wir den dynamischen Welttensor.

Da allgemein

$$\left.\begin{aligned} \int (\boldsymbol{L}, \boldsymbol{n})_x\, dS &= \int \mathrm{Div}_x \boldsymbol{L}\, dS = \\ &= \int \left(\frac{\partial \boldsymbol{L}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{L}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{L}_{xz}}{\partial z} - \frac{i}{c}\frac{\partial \boldsymbol{L}_{xt}}{\partial t} \right) d\boldsymbol{\Sigma}, \end{aligned}\right| \quad (18)$$

usw. gilt, so ergibt ein Vergleich von (16) mit (18) die Ausdrücke für die Komponenten von $\boldsymbol{L}$, die zusammengefaßt werden sollen in

$$\boldsymbol{L} = \left(\begin{pmatrix} \mathfrak{g}\frac{\mathfrak{v}}{c}, & i\mathfrak{g} \\ iu\frac{\mathfrak{v}}{c^2}, & -\frac{u}{c} \end{pmatrix} \right). \quad (19)$$

Die Summe der Diagonalkomponenten des Welttensors $\boldsymbol{L}$ beträgt daher

$$S = \boldsymbol{L}_{xx} + \boldsymbol{L}_{yy} + \boldsymbol{L}_{zz} + \boldsymbol{L}_{tt} = \frac{1}{c}(\mathfrak{g}\mathfrak{v} - u) = h. \quad (20)$$

Wir erhalten hier den Satz:

Der Lauesche Skalar[1]) des dynamischen Welttensors ist gleich der Dichte der Wirkungsgröße.

Es folgt aus (5) und (9) für das materielle Teilchen

$$H = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}. \quad (21)$$

Deshalb ist nach (13)

$$\mathfrak{g} = \frac{\mu \mathfrak{v}}{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}, \qquad u = \frac{\mu c^2}{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}. \quad (22)$$

Während bei Einstein die Dimension dieser mechanischen Größen von der gewöhnlichen um den Faktor $\frac{1}{c}$ abweicht, kommt bei unserer Theorie diese Besonderheit nicht vor.

Aus (22) sehen wir noch ein, daß der dynamische Welttensor $\boldsymbol{L}$ vollkommen symmetrisch ist.

Ferner erhält man aus (21) unter Beachtung der Konstanz von ν

$$\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}}\right) + \frac{\partial H}{\partial c} = -\int \left(\mu + c\frac{\partial \nu^1}{\partial c}\right) d\mathfrak{v}_0 = \\ = \int \frac{\partial h}{\partial c}\, d\mathfrak{v}.$$

Folglich ist nach (15)

$$\boldsymbol{k} = \diamond h = -\mu \diamond c - c \diamond \nu^1. \quad (23)$$

Die Dichte der ponderomotorischen Vierer-kraft ist gleich dem Gradienten der Dichte der Wirkungsgröße. Somit kann man auch schreiben:

$$d\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{k}\, d\boldsymbol{r}),$$

wodurch sich erkennen läßt, daß die Größe W tatsächlich die mechanische Wirkung der Kraft mißt. Die ponderomotorische Kraft setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der erste Anteil, der zum negativen Gradienten von c proportional ist, sei nach der Grundannahme II als die gravitierende Kraft interpretiert. Die Größe c selbst spielt dann die Rolle des Gravitationspotentials. Die sogenannte schwere Masse, d. h. der Quantitätsfaktor der gravitierenden Kraft ist übrigens hierbei gleich μ. In diesem Sinne darf man also von der Gleichheit der trägen und der schweren Masse reden.

Der andere Bestandteil der Kraft $\boldsymbol{k}$ tritt dadurch auf, daß ν^1 veränderlich ist. Er drückt also eigentlich den Druck des Gravitationsfeldes auf das betrachtete physikalische System aus, welcher bei einem statischen Zustande mit der gravitierenden Kraft das Gleichgewicht halten soll. Es liegt ja hierin auch die Erklärung, wie eine gewisse Menge der materiellen Masse des elementaren Teilchens, ohne sich zusammen-

1) Diese Benennung ist zum erstenmal von Einstein eingeführt (A. Einstein und M. Großmann, Entwurf usw., l. c.).

zuziehen, in einem, wenn auch verschwindend kleinen, so doch einigermaßen verbreiteten Volumen lokalisiert werden kann[1]).

§ 4. Bemerkungen zur Raumzeitanschauung.

Die vierdimensionale dynamische Gleichung (17) sowie der Ausdruck für die Viererkraft (23) hat eine invariante Form gegenüber Raumzeitdrehung. Dies zeigt sich schon daran, daß in unserer Dynamik das Relativitätsprinzip in strengem Sinne erfüllt ist. So behält die Lorentztransformation ihre Gültigkeit in unendlich kleinem Gebiete bei. Daß die anderen dreidimensionalen dynamischen Gleichungen in der Tat mit ihr verträglich sind, wird etwa am einfachsten durch folgendes erwiesen.

Da die Größe

$$dW = i\left(\mathfrak{G}\,d\mathfrak{r} - \frac{U}{c}(c\,dt)\right)$$

ein totales Differential sein muß, so besteht

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{U}{c}\right)^{2}). \qquad (24)$$

Andererseits folgt aus

$$0 = \frac{U}{c}d\mathfrak{r} - \mathfrak{G}\,(c\,dt)$$

die Beziehung:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{U}{c}\right) = -\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x}\ ^{3}), \qquad (25)$$

falls man die x-Achse in der Richtung der Bewegung wählt.

Denkt man sich nun das ganze Bezugssystem als einen unendlich verbreiteten Körper und wendet die Gleichungen (24) und (25) an, so kann man hieraus die Beziehungen zwischen den Raumzeitkoordinaten ermitteln. Dabei hat man freilich jeden Punkt des das Bezugssystem repräsentierenden, imaginären Körpers mit vollkommen gleichen physikalischen Eigenschaften versehen, anzunehmen. Da aber die physikalische Eigenschaft des Weltraumes vollständig durch die Dichte der Wirkungsgröße $h = -\mu c$ charakterisiert ist, so hat man dies damit zu tun, daß die Wirkungsgröße h für alle Punkte des imaginierten Körpers konstant sei. Dies ist ja die Bedingung, daß kein physikalischer Vorgang im Raume stattfindet, und in der Tat auch, wie aus (23) erhellt, die, daß die ganze ponderomotorische Kraft verschwindet. Andererseits sieht man noch ein, daß die Konstanz von h mit der Grundvorstellung verträglich sein kann, daß $d\Sigma$ und $dW = h\,d\Sigma$ totale Differentiale sind.

Nimmt man also die Größe μc raumzeitlich konstant an, so reduzieren sich die Gleichungen (24) und (25) auf

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\mathfrak{v}|}{c\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\right),$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{|\mathfrak{v}|}{c\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\right).$$

Diese sind aber nichts anderes als die Bedingungen, daß

$$c\,dt_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\left(c\,dt - \frac{|\mathfrak{v}|}{c}dx\right),$$

und

$$dx_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\left(dx - \frac{|\mathfrak{v}|}{c}c\,dt\right)$$

totale Differentiale sein sollen.

§ 5. Das Gravitationsfeld.

Die außerordentliche Bedeutung des Wirkungsprinzips liegt darin, daß alle Naturgesetze für die reversiblen Vorgänge überhaupt aus ihm allein abgeleitet werden können. Ebenso wie die Bewegungsgleichungen des materiellen Teilchens durch virtuelle Verschiebung, so kann man auch die Differentialgleichung des Gravitationsfeldes dann aus demselben Prinzip herausziehen, wenn man sich eine Variation des Gravitationspotentials c ausgeführt denkt.

Indem wir das Wirkungsprinzip mit Hilfe von (2) so schreiben:

$$-\delta W = \delta\int\left\{\frac{1}{2a}(\diamond c)^2 + \nu c\right\}d\Sigma = 0, \qquad (26)$$

und berücksichtigen:

$$\delta(d\Sigma) = 0,$$

können wir bei einer Variation von c erhalten:

$$\int \nu\,\delta c\,d\Sigma + \int\frac{1}{a}(\diamond c)\,\delta(\diamond c)\,d\Sigma = 0,$$

woraus sich nach partiellen Integrationen als die Bedingung für das Verschwinden des Ausdruckes ergibt:

$$\frac{1}{a}\diamond^2 c = \nu. \qquad (27)$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt:

1) Die elektrische Ladung des Elektrons betreffend soll das Entsprechende der Fall sein.

2) Diese Beziehung kann man auch mittels der Identität $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{U}{c^2}\right) = -\frac{\mathfrak{v}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{G}}{c}\right)$, und mittels der zweiten Gleichung in (14) verifizieren.

3) Die Gültigkeit dieser Beziehung kann ebenso durch die erste Gleichung in (14) leicht bestätigt werden.

$$\diamond^2 c = \mathbf{div}(\diamond c) = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial t}\right). \quad (28)$$

Die Gleichung (27) ist die Grundgleichung des Gravitationsfeldes, die der Poissonschen entspricht. In Worten lautet sie: Die Divergenz des Gradienten des Gravitationspotentials ist proportional der materiellen Masse.

$$\boldsymbol{L} = -\frac{1}{a}[[\diamond c, \diamond c]] = -\frac{1}{a}\begin{Vmatrix} \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x}, & \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y}, & \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial z}, & \frac{\partial c}{\partial x}\frac{1}{ic}\frac{\partial c}{\partial t} \\ \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x}, & \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial y}, & \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial z}, & \frac{\partial c}{\partial y}\frac{1}{ic}\frac{\partial c}{\partial t} \\ \frac{\partial c}{\partial z}\frac{\partial c}{\partial x}, & \frac{\partial c}{\partial z}\frac{\partial c}{\partial y}, & \frac{\partial c}{\partial z}\frac{\partial c}{\partial z}, & \frac{\partial c}{\partial z}\frac{1}{ic}\frac{\partial c}{\partial t} \\ \frac{1}{ic}\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}, & \frac{1}{ic}\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial y}, & \frac{1}{ic}\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial z}, & \frac{1}{ic}\frac{\partial c}{\partial t}\frac{1}{ic}\frac{\partial c}{\partial t} \end{Vmatrix}. \quad (30)$$

Dann können wir uns nach einiger Ausrechnung davon überzeugen, daß die Gleichung (17) durch die Ausdrücke (29) und (30) identisch erfüllt wird. Auffallend ist die Einfachheit und die vollkommene Symmetrie des Ausdruckes von $\boldsymbol{L}$. Dieser Tensor hängt mit dem von Abraham eingeführten Gravitationstensor $\boldsymbol{G}$, der dieselben Schubkomponenten wie $\boldsymbol{L}$ hat, dessen Diagonalkomponenten aber von denen des Tensors $\boldsymbol{L}$ um ein Glied $\frac{1}{2a}(\diamond c)^2$ verschieden sind, folgendermaßen zusammen:

$$\mathbf{Div}\,\boldsymbol{G} = \mathbf{Div}\,\boldsymbol{L} + \diamond(v^1 c). \quad (31)$$

Daher ergibt sich, da $\mathbf{Div}\,\boldsymbol{L} = -\diamond(\mu c)$ ist,

$$\mathbf{Div}\,\boldsymbol{G} = -v\diamond c. \quad (32)$$

Die Divergenz des Abrahamschen Tensors ist gleich der gravitierenden Kraft, die auf die materielle Masse allein wirkt.

London, 8. Februar 1914.

(Eingegangen 12. Februar 1914.)

Spannungsverteilung bei der Berührung zweier elastischer Zylinder.

Von M. T. Huber und S. Fuchs.

Die vorliegende Arbeit bildet eine weitere Folge der von den Verfassern veröffentlichten Darstellung einer Spannungsverteilung bei der Berührung zweier elastischer Kugeln[1]). Wir

1) M. T. Huber, „Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper", Ann. d. Phys. **14**, 153—163, 1904. S. Fuchs, „Hauptspannungstrajektorien bei der Berührung einer Kugel mit einer Platte", diese Zeitschr. **14**, 1282 bis 1285, 1913.

Der Ausdruck (23) für die ponderomotorische Kraft wird infolgedessen auch so geschrieben:

$$\boldsymbol{k} = -\frac{1}{a}(\diamond^2 c)\cdot(\diamond c) - \diamond\left(\frac{(\diamond c)^2}{2a}\right). \quad (29)$$

Wir sind nun in der Lage, dem der Viererkraft $\boldsymbol{k}$ gegenübergestellten Tensor $\boldsymbol{L}$ einen anderen Ausdruck zuzuordnen. Wir setzen nämlich für die Komponenten von $\boldsymbol{L}$:

wollen im folgenden den praktisch wichtigen Fall behandeln, daß nämlich zwei elastische Zylinder sich längs einer erzeugenden Geraden in einem sehr kleinen Teile ihrer Oberfläche berühren und dabei einen endlichen Druck gegenseitig ausüben. Die sich berührenden Oberflächen sollen vollkommen glatt sein, d. h. wir schließen das Vorhandensein tangentialer Druckkomponenten vollständig aus. Wir betrachten zunächst die „Druckfläche" als Grenzfall einer elliptischen Druckfläche, von der die große Achse a unendlich geworden ist, was bei Walzen, die ziemlich lang im Verhältnis zu ihrem Durchmesser sind, nicht bedenklich erscheint. Demgemäß müssen wir auch den Gesamtdruck p unendlich werden lassen, wenn der Druck auf die Längeneinheit des Zylinders $p' = \frac{p}{l}$ endlich erscheinen soll.

Wir können nach Hertz[1]) die unbestimmte Größe $\frac{p}{a} = \frac{\infty}{\infty}$ gleich $\frac{4}{3}p'$ setzen und erhalten dann, wenn $r_1 = \frac{1}{\varrho_1}$ und $r_2 = \frac{1}{\varrho_2}$ die Halbmesser, $E_1\mu_1$, $E_2\mu_2$ die Young- bzw. Poissonsche und

$$\vartheta_1 = \frac{4(1-\mu_1^2)}{E_1}, \quad \vartheta_2 = \frac{4(1-\mu_2^2)}{E_2}$$

die Hertzsche Elastizitätskonstanten der beiden Zylinder bezeichnen, für die kleine Halbachse b

1) „Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte", Verh. d. Ver. zur Beförd. d. Gewerbefleißes, Berlin 1882; oder auch „Gesammelte Werke" I, 174—196, 1895.

der Druckellipse, die der „Drucklinie" im Querschnitte der Walzen entspricht:

$$b = \sqrt{\frac{p'(\vartheta_1+\vartheta_2)}{\pi(\varrho_1+\varrho_2)}}. \qquad (I)$$

Die Auswertung der Druckkomponenten kann an Hand der Hertzschen allgemeinen Gleichungen[1]) geschehen:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - 4\mu\frac{\partial P}{\partial z}\\ Y_y &= -\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} - 4\mu\frac{\partial P}{\partial z}\\ Z_z &= -\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - 4(2-\mu)\frac{\partial P}{\partial z}\\ X_y &= -\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\,\partial y}\\ X_z &= 2z\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z}\\ Y_z &= 2z\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

Obigen Formeln ist in jedem der beiden sich berührenden Körper ein besonderes mit ihm im Unendlichen starr verbundenes, rechtwinklig-geradliniges Koordinatensystem zugrunde gelegt, und zwar derart, daß die xy-Ebene und die z-Achse des Systems mit der gemeinsamen Tangentialebene bzw. mit der Normalen, die in die Richtung des auszuübenden Druckes fällt, während der ursprünglichen mathematischen Berührung zusammenfällt; die x-Achse können wir uns dabei parallel der Zylinderachse denken, während die in das Innere eines jeden Zylinders gezogene z-Achse als positiv gelten soll.

Die Verschiebung der beiden Körper gegeneinander bei einem auf die Körper ausgeübten Drucke hat natürlich auch eine gegenseitige Verschiebung der beiden Koordinatensysteme zur Folge, und zwar parallel der z-Achse, wobei ihre Größe der Annäherung der von der Druckfläche unendlich entfernten Teile beider Körper gleich ist. Die xy-Ebene entfernt sich also von der Druckfläche um eine unendlich kleine Strecke und kann daher als in der Oberfläche liegend angesehen werden, ebenso die Richtung der z-Achse als die Richtung der gemeinsamen Normalen.

X_x, Y_y, Z_z bezeichnen die Normaldruckkomponenten in der Richtung der x-, y-, z-Achse, während X_y die Tangentialdruckkomponente in der Richtung der x-Achse bildet, welche in einem Flächenelemente, dessen Normale die y-Richtung hat, von dem Körperteile, in dem y kleinere Werte besitzt, auf denjenigen, in dem y größer ist, ausgeübt wird; analoge Bezeichnungen gelten für die übrigen Tangentialkomponenten. P ist außerhalb der Druckfläche eine Funktion der Koordinaten von der Form:

$$P = \frac{p'}{4\pi}\int_u^\infty \frac{1-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{\lambda}}{\sqrt{(b^2+\lambda)\lambda}}\,d\lambda, \qquad (III)$$

wo die untere Integralgrenze u die positive Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{u}=1 \qquad (IV)$$

bezeichnet. Für das Innere der Druckfläche ist die untere Grenze des Integrals $u=0$ zu setzen. Schließlich bezeichnet Π zwei Funktionen, deren eine sich auf den einen, die andere auf den anderen Körper bezieht:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 &= -\frac{2(1+\mu_1)}{E_1}P + \\ &\quad + \frac{2(1+\mu_1)(1-2\mu_1)}{E_1}\left\{\int_z^\infty P\,dz - J_\infty\right\}\\ \Pi_2 &= -\frac{2(1+\mu_2)}{E_2}P + \\ &\quad + \frac{2(1+\mu_2)(1-2\mu_2)}{E_2}\left\{\int_z^\infty P\,dz - J_\infty\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (V)$$

Hierin bezeichnet J_∞ eine unendliche Konstante, die so gewählt ist, daß Π endlich wird.

Da die Funktion P also auch Π, wie ersichtlich, von der x-Koordinate unabhängig ist, darf man wegen (II) annehmen, daß der Spannungszustand in jedem Querschnitte derselbe ist, wie in jedem anderen, d. h. wir haben hier mit einem ebenen Problem zu tun. In der Tat werden hier zwei Tangentialspannungen zu Null, und zwar:

$$X_y = X_z = 0,$$

was bekanntlich den zweiachsigen Spannungszustand bedingt.

Da unsere Gleichungen demnach für jede beliebige Lage des Koordinatenursprungs gelten, können wir daher ihn jedesmal mit dem Punkte zusammenfallen lassen, welcher den gewählten Querschnitt bestimmt.

Das Integral (III) läßt sich in folgender geschlossener Form darstellen:

$$P = \frac{p'}{2\pi}\left\{J_\infty - \ln\frac{1}{b}\left(\sqrt{u}+\sqrt{b^2+u}\right) - \frac{\frac{y^2}{\sqrt{b^2+u}}+\frac{z^2}{\sqrt{u}}}{\sqrt{b^2+u}+\sqrt{u}}\right\}, \qquad (I)$$

[1]) „Über die Berührung fester elastischer Körper". Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. **92**, 156—171, 1881; oder auch „Ges. Werke" 1, 155—173, 1895.

wo wegen (IV)

$$u = \frac{1}{2}\left[y^2+z^2-b^2+ \sqrt{(y^2+z^2-b^2)^2+4b^2z^2}\right]. \quad (2)$$

Die Differentiation nach z liefert ohne Schwierigkeit:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{p'}{2\pi}\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\left[-\frac{1}{2\sqrt{(b^2+u)u}} + \frac{\sqrt{b^2+u}-\sqrt{u}}{2b^2}\frac{\sqrt{b^2+u}+\sqrt{u}}{\sqrt{(b^2+u)u}}\right] + \frac{2}{b^2}(\sqrt{u}-\sqrt{b^2+u})\frac{z}{\sqrt{u}}\right\}.$$

Hier verschwindet jedoch identisch der Ausdruck in der eckigen Klammer; folglich ist

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{p'z}{\pi b^2}\left\{\sqrt{\frac{b^2+u}{u}}-1\right\}. \quad (3)$$

Die Verdichtung in einem beliebigen Punkte des Körpers außerhalb der Druckfläche ist gegeben durch die Hertzsche Gleichung:

$$\sigma = \frac{4(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\frac{\partial P}{\partial z}, \quad (VI)$$

also wegen (3):

$$\sigma = -\frac{p'}{\pi b^2}\frac{4(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\frac{\sqrt{b^2+u}-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}z. \quad (4)$$

Aus (V) folgt ohne Berücksichtigung der Indizes:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \frac{2(1+\mu)}{E}\left\{(1-2\mu)\int_z^\infty \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}dz - z\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right\} \quad (5)$$

und wegen

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

folgt aus (II) für die normale Druckkomponente außerhalb der Druckfläche:

$$X_x = -4\mu\frac{\partial P}{\partial z},$$

also wegen (3)

$$X_x = 4\mu\frac{p'z}{\pi b^2}\left[\sqrt{\frac{b^2+u}{u}}-1\right]. \quad (6)$$

Für die in die Richtung des Druckes fallende Spannungskomponente findet man aus (II) und (V) die allgemeine Gleichung:

$$Z_z = -2\frac{\partial P}{\partial z}+2z\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}. \quad (VII)$$

Berücksichtigt man die wegen (IV) bestehende Identität:

$$\frac{1}{2u+b^2-y^2-z^2} = \frac{u}{u^2+b^2z^2} \quad (7)$$

und bildet den Differentialquotienten

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z(b^2+u)u}{u^2+b^2z^2}, \quad (8)$$

so liefert die Differentiation von (3):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -\frac{p'}{\pi b^2}\left\{\frac{u^2}{u^2+b^2z^2}\sqrt{\frac{b^2+u}{u}}-1\right\}. \quad (9)$$

Folglich ist

$$Z_z = \frac{2p'}{\pi}\frac{z^3}{u^2+b^2z^2}\sqrt{\frac{b^2+u}{u}}. \quad (10)$$

Die dritte Normalkomponente Y_y finden wir aus der Relation:

$$X_x+Y_y+Z_z = -4(1+\mu)\frac{\partial P}{\partial z}, \quad (11)$$

welche aus den Gleichungen (II), wegen

$$\nabla^2 \Pi = -\frac{4(1+\mu)}{E}\frac{\partial P}{\partial z} \quad (VIII)$$

leicht zu entnehmen ist. Wir erhalten demnach:

$$Y_y = \frac{2p'z}{\pi b^2}\left\{\sqrt{\frac{b^2+u}{u}}\left[2-\frac{b^2z^2}{u^2+b^2z^2}\right]-2\right\}. \quad (12)$$

Unter Berücksichtigung, daß

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2u^2y}{u^2+b^2z^2}, \quad (13)$$

erhalten wir schließlich wegen (3) für die tangentiale Druckkomponente die Formel:

$$Y_z = \frac{2p'}{\pi}\frac{yz^2}{u^2+b^2z^2}\sqrt{\frac{u}{b^2+u}}. \quad (14)$$

Wie aus den Formeln (6), (10), (12), (14) leicht einzusehen ist, verschwinden alle vier Druckkomponenten für die unendlichen Werte der Koordinaten, was den von Hertz gewählten Grenzbedingungen vollkommen genügt.

Mit Hilfe der bekannten Formel:

$$S_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{1}{2}\left[Y_y+Z_z \pm \sqrt{(Z_z-Y_y)^2+4Y_z^2}\right]$$

findet man leicht die größte und die kleinste Hauptspannung (außerhalb der Druckfläche):

$$S_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{2p'z}{\pi b^2}\left\{\sqrt{\frac{b^2+u}{u}}-1 \pm \sqrt{\left[1-\frac{u^2}{u^2+b^2z^2}\sqrt{\frac{b^2+u}{u}}\right]^2+\left[\frac{b^2yz}{u^2+b^2z^2}\right]^2\frac{u}{b^2+u}}\right\}; \quad (15)$$

die mittlere Hauptspannung wird, wie ersichtlich, mit X_x identisch.

Die Größe der Hauptdrucke in der z-Achse ergibt sich ohne Schwierigkeit mit

$$(u)_{y=0} = z^2$$

aus den allgemeinen Formeln (6), (10), (12):

$$(X_x)_{y=0} = \frac{4\mu p'}{\pi b^2}\left[\sqrt{b^2+z^2} - z\right] \tag{16}$$

$$(Y_y)_{y=0} = \frac{2p'}{\pi b^2}\left|\sqrt{b^2+z^2}\left[2 - \frac{b^2}{b^2+z^2}\right] - 2z\right| \tag{17}$$

$$(Z_z)_{y=0} = \frac{2p'}{\pi\sqrt{b^2+z^2}}. \tag{18}$$

Für den Koordinatenursprung erhalten wir folglich mit $z = 0$:

$$X_x^{(0)} = \frac{4\mu p'}{\pi b} \tag{19}$$

$$Y_y^{(0)} = Z_z^{(0)} = \frac{2p'}{\pi b}. \tag{20}$$

Da in der Druckfläche $z = 0$ und $u = 0$ zu setzen ist, so nimmt in allgemeinen Formeln für X_x, Y_y und Z_z der Ausdruck $\frac{z}{\sqrt{u}}$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Findet man aber auf bekannte Weise seinen wahren Wert:

$$\left(\frac{z}{\sqrt{u}}\right)_{\substack{z=0\\u=0}} = \frac{\sqrt{b^2-y^2}}{b},$$

dann gelten für die Hauptdrucke in der Druckfläche folgende Formeln:

$$X_x = \frac{4\mu p'}{\pi b^2}\sqrt{b^2-y^2} \tag{21}$$

$$Y_y = Z_z = \frac{2p'}{\pi b^2}\sqrt{b^2-y^2}. \tag{22}$$

Die letzte Gleichung ist bereits von Hertz angegeben worden.

Es ist zu beachten, daß für $y = b$, also am Rande der Druckfläche, alle Spannungskomponenten verschwinden, während bei zwei sich berührenden Kugeln gerade am Rande des Druckkreises die größte Zugspannung entsteht[1]).

Die Spannungsverteilung in einem gegebenen Körper wird durch Angabe der Spannungstrajektorien besonders klar dargestellt. Bezeichnet γ und $\gamma + \frac{\pi}{2}$ die Neigung der Hauptrichtungen gegen die y-Achse für die in der yz-Ebene liegenden Punkte, dann gilt bekanntlich folgende Formel:

$$\operatorname{ctg} 2\gamma = \frac{Z_z - Y_y}{2Y_z}$$

und wegen (10), (12), (14) ist:

$$\operatorname{ctg} 2\gamma = \frac{b^2+u}{b^2yz}\left|\frac{u^2+b^2z^2}{u}\sqrt{\frac{u}{b^2+u}} - u\right|. \tag{23}$$

Aus der letzten Gleichung findet man ohne Schwierigkeit die Differentialgleichungen der beiden Hauptspannungstrajektorien:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dz} &= -\frac{b^2+u}{b^2yz}\left[\sqrt{\left|\frac{u^2+b^2z^2}{u}\sqrt{\frac{u}{b^2+u}} - u\right|^2 + \left|\frac{b^2yz}{b^2+u}\right|^2} + \frac{u^2+b^2z^2}{u}\sqrt{\frac{u}{b^2+u}} - u\right]\\ \frac{dY}{dz} &= \frac{b^2+U}{b^2Yz}\left[\sqrt{\left|\frac{U^2+b^2z^2}{U}\sqrt{\frac{U}{b^2+U}} - U\right|^2 + \left|\frac{b^2Yz}{b^2+U}\right|^2} - \frac{U^2+b^2z^2}{U}\sqrt{\frac{U}{b^2+U}} + U\right],\end{aligned}\right| \tag{24}$$

wobei (y, z) bzw. (Y, z) die Koordinaten der beiden Trajektorienscharen und U eine Funktion der Y, z analog der Gleichung (2) bezeichnen. Die Integration dieser Gleichung scheitert jedoch praktisch wegen ihrer großen Kompliziertheit. Man kann aber mit Vorteil die approximative Heunsche Lösung[1]) anwenden, bei der eine vorgeschriebene Annäherung nicht durch willkürliche Vermehrung der Gliederzahl einer Formel, sondern im wesentlichen durch sukzessive Substitutionen erreicht wird. Wählen wir eine Approximation dritter Ordnung, dann gelten, wenn wir an die den Gleichungen (24) zugrunde gelegten Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg}\gamma &= \left|\frac{dy}{dz}\right| = \psi(y, z)\\ \operatorname{tg}\gamma &= \left|\frac{dY}{dz}\right| = \Psi(Y, z)\end{aligned}\right| \tag{24'}$$

denken, folgende einfache Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\Delta y &= \frac{1}{4}\left\{\operatorname{ctg}\gamma + 3\operatorname{ctg}\gamma'\right\}\Delta z\\ \Delta Y &= \frac{1}{4}\left\{\operatorname{tg}\gamma + 3\operatorname{tg}\gamma'\right\}\Delta z,\end{aligned}\right| \tag{25}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg}\gamma' &= \psi\left(y+\frac{2}{3}\psi\left\{y+\frac{1}{3}\psi(y, z)\Delta z,\ z+\frac{1}{3}\Delta z\right\}\Delta z,\ z+\frac{2}{3}\Delta z\right)\\ \operatorname{tg}\gamma' &= \Psi\left(Y+\frac{2}{3}\Psi\left\{Y+\frac{1}{3}\Psi(Y, z)\Delta z,\ z+\frac{1}{3}\Delta z\right\}\Delta z,\ z+\frac{2}{3}\Delta z\right).\end{aligned}\right| \tag{25'}$$

Δy bzw. ΔY bezeichnen offenbar den Zuwachs der Funktion $y = f(z)$ bzw. $Y = F(z)$ bei entsprechender Änderung von z um Δz; bei bekannter Anfangsstelle (y, z) ist es also möglich,

1) Zeitschr. f. Math. u. Phys. **45**, 30, 1900.

1) Huber, l. c.

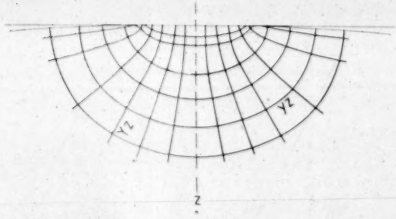
die unbekannte Funktion $y = f(z)$ sukzessive analytisch fortzusetzen. Bei Wahl des entsprechenden Zeichens in den Gleichungen (25′) soll man beachten, daß bei den angedeuteten Änderungen von y bzw. Y das Vorzeichen von Δy bzw. ΔY, bei den von z das Vorzeichen von Δz zurückzulassen ist; das Vorzeichen von Δy, ΔY und Δz ist natürlich bei bekanntem γ eindeutig bestimmt.

Als Beispiel diene die Auswertung einer Hauptspannungskurve für $b = 0{,}003$:

y	z	ctg γ	Δz	ctg γ'	Δy
0,000500	0,00240	9,350	−0,00015	4,7500	+0,000885
0,001385	0,00225	3,185	−0,00045	1,9500	+0,001015
0,002400	0,00180	1,548	−0,00060	1,1440	+0,000747
0,003147	0,00120	0,831	−0,00060	0,5415	+0,000368
0,003515	0,00060	0,400	−0,00060	0,1315	+0,000119
0,003634	0,00000				

Zur graphischen Darstellung der Hauptspannungstrajektorien gelangt man aber viel schneller durch graphische Auswertung der Differentialgleichungen (24) oder noch besser durch die Anwendung der üblichen Mohrschen Konstruktion[1]) bei direkter Benutzung der Formeln (10), (12), (14), weil man dabei auch über die Größe der Hauptspannungen urteilen kann. Der graphischen Auswertung liegt, wie bekannt, die Ermittelung der Hauptrichtungen für benachbarte Punkte zugrunde, wobei man eine gebrochene Linie erhält, in die die Spannungskurve eingeschrieben werden kann; das Verfahren entspricht also in seinem ersten Teile den Gleichungen (25), indem man $\gamma' = \gamma$ voraussetzt.

Auf Grund des Mohrschen Verfahrens wurden die Hauptspannungskurven in der yz-Ebene für den Fall der Berührung eines elastischen Kreiszylinders $\left[E_1,\ \mu_1 = \frac{3}{10}\right]$ mit einer Platte $[E_2 = E_1,\ \mu_2 = \mu_1]$ gezeichnet.



Die yz-Linien bedeuten Linien der kleinsten Hauptspannung; sie bezeichnen überall Druck, welcher stetig abnimmt, wenn wir von der z-Achse die Spannungstrajektorie entlang gehen, und wird dann in der Oberfläche außerhalb der Druckfigur zu Null. Die Größe der genannten Hauptspannung nimmt schnell ab, wenn wir längs der z-Achse in das Innere der Walze eindringen. In der Druckfläche nimmt der Hauptdruck vom Rande aus gegen die Mitte zu wie die Ordinaten einer über der „Drucklinie" **2b** stehenden Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{Y_y^2}{\left(\frac{2p'}{\pi b}\right)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (26)$$

aus der Formel (22) leicht zu entnehmen ist. In der Oberfläche des Zylinders außerhalb der Druckfläche sind die Tangenten zu den yz-Linien stets des z-Achse, dagegen in der Druckfläche der y-Achse parallel.

Die Y_z-Linien sind überall Drucklinien und folgen der Richtung der größten Hauptspannung. Die Größe des Druckes sinkt stetig, wenn wir längs einer von der Druckfläche auslaufenden Spannungstrajektorie in das Innere des Zylinders eindringen; indem wir von der Oberfläche außerhalb der Druckfläche die Y_z-Linie entlang gehen, nimmt der Hauptdruck von Null an stetig zu. Die Spannungsverteilung in der Druckfläche entspricht der Gleichung (26), weil wegen (22) $Z_z = Y_y$. Die genannten Drucklinien endigen selbstverständlich senkrecht in der Druckfläche und sind außerhalb derselben in der spannungsfreien Oberfläche der Y-Achse parallel. Zu den Y_z-Trajektorien ist natürlich auch die z-Achse hinzuzurechnen.

Es ist zu beachten, daß unsere Betrachtungen nur für einen unendlich kleinen, die Druckstelle umgebenden Teil des Zylinders gelten. Innerhalb dieses Teiles verschwindet also in der Oberfläche z gegen y, was auch ein Verschwinden der Spannungskomponenten zur Folge hat. Da wir die Druckfläche ebenfalls als unendlich klein voraussetzten, dann gelten unsere Gleichungen und Spannungskurven, streng genommen, nur für ein Gebiet von gleicher Größenordnung wie die Druckfläche. An allen anderen Stellen, die von der Druckfläche weiter entfernt sind, gilt ein anderer, zuerst von Hertz gefundener, Spannungszustand[1]).

Zusammenfassung.

Es wurden aus der Hertzschen allgemeinen Lösung die Spannungskomponenten für zwei elastisch-isotrope, längs einer erzeugenden Ge-

1) Zeitschr. d. V. d. Ingen. **44**, 1526, 1900.

1) Vgl. Hertz, „Über die Verteilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiszylinder", Zeitschr. f. Math. u. Phys. **28**, 125—128, 1883, oder „Gesamm. Werke" 1, 283—287, 1895, oder auch Föppl, „Vorles. üb. techn. Mechanik" **5**, 333—342, 1907.

raden sich berührende Kreiszylinder abgeleitet — die Differentialgleichungen der Hauptspannungstrajektorien für den obigen Fall ausgerechnet und ihre approximative Integration auf Grund der Heunschen Lösung durchgeführt.

Für den Fall der Berührung eines Kreiszylinders mit einer Platte wurden Hauptspannungstrajektorien gezeichnet, wobei sich zeigte, daß, innerhalb des den Formeln zugrunde gelegten Gültigkeitsgebiets, ausschließlich Druckspannungen vorkommen.

Lemberg, Labor. f. techn. Mechan. an d. Techn. Hochschule, Februar 1914.

(Eingegangen 11. Februar 1914.)

Nachtrag zu einer Bemerkung über die Abhängigkeit der dreifachen Luftspiegelung nach Vince von der Temperaturverteilung[1]).

Von Wilhelm Hillers.

Zur Diskussion der dreifachen Luftspiegelung nach Vince wurde früher in dieser Zeitschrift[1]) die Temperaturfunktion

$$t = \frac{t_0(1+e^{-\alpha a})}{1+e^{\alpha(x-a)}} \qquad (1)$$

vorgeschlagen. Es konnte gezeigt werden, daß für $\lim a = -\infty$, wobei das vorliegende Temperaturgesetz (1) in ein rein exponentielles ohne Wendepunkt übergeht, die Abbildung den Charakter des dreifachen Bildes nach Vince verliert und den der Formart nach Monge mit zweifachem Bilde annimmt. Die Voraussetzung war dabei, daß t auf Temperaturunterschiede beschränkt bleibt, die gegen die absolute Temperatur klein sind. In den Verhältnissen der freien Atmosphäre gilt diese Beschränkung immer, nicht aber bei künstlichen Versuchen an geheizten Flächen. Daher muß die Betrachtung für diesen Fall auch auf große t ausgedehnt werden. Die Funktion (1) erweist sich als geschmeidig genug, diese Untersuchung der früheren ohne weiteres anzuschließen. Dabei wird ein interessantes Ergebnis gewonnen. Läßt man also die Beschränkung auf „kleine" t fallen, behält aber die auf „kleine" φ bei, so wird die Differentialgleichung für die Lichtbahn:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{\varphi_1^2 - \frac{(n_1^2-1)t}{T_1+t}}}. \qquad (2)$$

Für den Scheitel eines Strahls des Parameters φ_1 gilt demnach

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{n_1^2-1)t}{T_1+t}} = \sqrt{\frac{2(n_1-1)t}{T_1+t}}, \qquad (3)$$

für den Strahl größter Neigung gegen die Grenzebene des optischen Mittels

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2(n_1-1)t_0}{T_1+t_0}}. \qquad (4)$$

Daher wird aus der obigen Differentialgleichung (2)

$$y = \pm \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\varphi_1^2 - \varphi_0^2\left(\frac{t}{t_0}\right)\cdot\frac{T_1+t_0}{T_1+t}}}. \qquad (5)$$

Für $\lim t = \infty$ liefert (4) $\varphi_0 = 1^0 20'$, die Beschränkung der Betrachtung auf stets kleine Neigungen der Strahlenasymptoten gegen die Grenzebene können wir also ohne Gefahr aufrecht erhalten. (3), (4) und (5) gehen in die früher benutzten Gleichungen über, wenn wir im ganzen Variationsgebiet von t, t und t_0 gegen T_1 vernachlässigen dürfen.

Setzen wir t nach (1) in (5) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$y = \pm \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\varphi_1^2 - \varphi_0^2 \frac{T_0(1+e^{-\alpha a})}{T_0+t_0\cdot e^{-\alpha a}}\cdot\frac{1}{1+e^{\alpha\left(x-a-\frac{1}{\alpha}\log\frac{T_0+t_0\cdot e^{-\alpha a}}{T_1}\right)}}}},$$

statt früher ($t_0 \ll T_1$)

$$y = \pm \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\varphi_1^2 - \varphi_0^2\frac{(1+e^{-\alpha a})}{1+e^{\alpha(x-a)}}}}.$$

Ein Vergleich zeigt, daß die Form des Integrals ganz die gleiche geblieben ist. Nur treten für die Konstanten φ_0 und a im zweiten Integral etwas veränderte Größen φ_0' und a' im ersten auf, für die gilt

$$\varphi_0' = \varphi_0\sqrt{\frac{T_0}{T_0+t_0\cdot e^{-\alpha a}}},$$

$$a' = a + \frac{1}{\alpha}\log\frac{T_0+t_0\cdot e^{-\alpha a}}{T_1}.$$

Die Diskussion ist somit ganz wie früher durch-

1) Siehe diese Zeitschrift **14**, 718—723, 1913.

führbar. Es macht sich aber ein Unterschied geltend. Die Scheitel der Strahlen, die das dritte Bild liefern, werden im wesentlichen nach den früheren Untersuchungen zwischen der Grenze des Mediums und der Entfernung a liegen. Das dritte Bild wird desto unentwickelter bleiben, je kleiner das nur positiv brauchbare a ist. Da an Stelle von a jetzt das größere a' zu setzen ist, werden die Bedingungen für das dritte Bild günstiger sein. In der Tat verschwindet für $\lim a = -\infty$ das dritte Bild nicht unbedingt, da dann a' einen endlichen Wert behält.

$$\lim_{a=-\infty} a' = \frac{1}{\alpha} \log \frac{t_0}{T_1}.$$

Auch eine rein exponentielle Temperaturfunktion kann also eine dreifache Abbildung nach Vince erzeugen. Praktisch wird das aber nur möglich sein, wenn

$$t_0 > T_1$$

wird, da dann a' positive Werte annimmt. In den im nächsten Aufsatze angeführten Versuchen war die höchste gemessene Temperatur 186°, während T_1 gegen 300° ist. Somit dürfen wir erwarten, daß auch hierbei ein dreifaches Bild stets mit einem Wendepunkte der Temperaturfunktion vergesellschaftet ist, sofern diese nur einen der Gleichung (1) ähnlichen Charakter hat.

(Eingegangen 3. Februar 1914.)

Einige experimentelle Beiträge zum Phänomen der dreifachen Luftspiegelung nach Vince[1].

Von Wilhelm Hillers.

Vor einiger Zeit konnte ich hier[2]) das dreifache Bild einer Luftspiegelung nach Vince vorführen, das man überraschenderweise an einer durch Sonnenschein erwärmten Mauer häufig beobachten kann. Die Skizze einer damit angegebenen Diskussion ließ vermuten, daß während der Entwicklung dieses dreifachen Bildes die der Wand zu veränderliche Temperatur der Luft einen Vorzeichenwechsel in der Änderung der Temperatur aufzuweisen hat. Eine vorläufige thermometrische Untersuchung zeigte einen solchen Wendepunkt der Temperaturfunktion nicht mit genügender Sicherheit. Zunächst wurde daher das dreifache Bild nach Vince an einer künstlich geheizten Fläche erzeugt, die zugehörige Temperaturverteilung mit Thermoelementen durchgemessen. Ebenfalls wurde die Temperaturfunktion an der erwähnten Mauer mit Thermoelementen genauer zu bestimmen gesucht. Im folgenden soll über das Ergebnis beider Untersuchungen berichtet werden.

Der Apparat. Der zur Erzeugung von Luftspiegelungen benutzte Apparat bestand aus einem horizontalen, 2 m langen und 8 cm breiten Brette. Es war (Fig. 1) zunächst mit einer Lage Asbestpappe bedeckt, auf die ein 12 m langer und 0,4 mm dicker Eisendraht hin

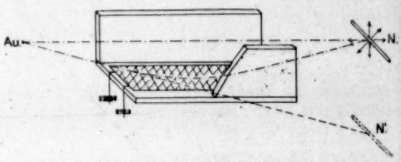


Fig. 1.

und her gespannt war. Ihm konnte durch Anschlußklemmen elektrischer Strom zugeführt werden. Der Draht wurde in eine mehrere Millimeter dicke Schicht von Portlandzement eingebettet. Die einigermaßen ebene obere Fläche, die Heizfläche, konnte durch den Strom auf beliebige Temperaturen gebracht werden. Die normale Belastung des Heizdrahtes mit Energie war 110 Volt × 3,1 Amp. Blickt man hierbei aus etwa 3 m Entfernung des Auges Au vom diesseitigen Ende des Brettes über die Heizfläche hin nach dem glühenden Stifte N einer Nernstlampe, der sich wenig oberhalb der Fläche jenseits befindet, so bemerkt man in der Heizfläche als Spiegel ein glänzendes Reflexbild N' des Stiftes. Das Bild ist unruhig. Der Abstand vom Objekt (dem ersten Bilde) wird merklich vergrößert, wenn an das Grundbrett zwei vertikale Seitenbretter angeschraubt werden. Im folgenden wurde der Apparat stets mit ihnen gebraucht. Er soll daher als „Rinne" bezeichnet werden. Sie stand bei den Versuchen auf einem Bocke, der sich leicht beliebig in verschiedenen Höhen einstellen ließ. Setzt man vor die Lichtquelle N einen Spalt und eine Projektionslinse, die ein horizontales Büschel erzeugt, und schickt dieses Büschel von oben unter geringer Neigung in die Rinne, so zeichnet sich auf den Seitenbrettern der gekrümmte Weg der Lichtstrahlen innerhalb der ungleich warmen Luft ab. Stellt man die Rinne in der Höhe noch so ein, daß der Scheitel des krummen Lichtbüschels die Heizfläche gerade in der Mitte der Erstreckung berührt, so liegen

1) Auszug aus einer größeren Abhandlung, die in den Abhandlungen des Naturw. Vereins zu Hamburg erscheinen wird.

2) Diese Zeitschr. 14, 718—723, 1913.

die Ein- und Austrittsstellen des Büschels in die Rinne etwas über 1 cm höher. In erster Näherung werde die Krümmung als gleichmäßig angenommen. Dann berechnet sich danach der Krümmungsradius zu 50 m. Dieser Wert stimmt mit den folgenden Temperaturbeobachtungen gut überein. Andeutungen eines dreifachen Bildes des Nernststiftes wurden bei Beobachtungen mit bloßem Auge erhalten, wenn an die Heizleitung 220 Volt kurz angelegt wurden. Es schien sich dann öfter von dem ersten Spiegelbilde (dem zweiten Bilde) ein zweites Spiegelbild (drittes Bild) abzuspalten. Wurde die Rinne oben zugedeckt, so ging die ganze Erscheinung der Luftspiegelung stark zurück. Das erste und zweite Bild rückten viel näher aneinander. Die Abspaltung des dritten Bildes war besonders deutlich in den ersten Augenblicken zu beobachten, nachdem die Zudeckung wieder abgenommen worden war. An eine eingehendere Untersuchung war so aber nicht zu denken, da bei der hohen Belastung der Apparat zu sehr gefährdet wurde und die ganze Erscheinung zu unbeständig und unruhig war.

Die Temperaturfunktion. Die Lötstelle eines Thermoelements aus einem je 0,1 mm dicken Eisen- und Konstantandraht wurde durch den Raum über der geheizten Fläche geführt. Bei unverdeckter Rinne waren die Ablesungen, besonders für 1—4 mm Abstand von der Heizfläche, recht inkonstant. Es wurden daher von 20 zu 20 sec im ganzen 20 Ablesungen gemacht und aus ihnen das Mittel genommen. Diese Mittelwertsbildung erwies sich als unnötig, als die Rinne oben mit Klötzen lose verdeckt wurde.

In Fig. 2 sind die Meßergebnisse in Form von Kurven wiedergegeben. Als Abszissen sind die Abstände x in Millimetern von der Heizfläche, als Ordinaten die Temperaturüberschüsse t über Zimmertemperatur genommen. Die Kurven I, II, III, V beziehen sich auf oben offene Rinne. Kurve IV wurde erhalten, als diese oben nicht sehr dicht mit Klötzen zugedeckt worden war. Bei Kurve I war der Heizeffekt 156 Watt, bei den Kurven II und V normal 330 Watt und den Kurven III und IV 500 Watt. In allen Kurven bei unverdeckter Rinne fällt also die Temperatur innerhalb der ersten 5 mm sehr steil ab, während der weitere Abfall auf Zimmertemperatur dann immer langsamer asymptotisch erfolgt. Ein Wendepunkt ist in Kurve I bei halber Belastung nicht deutlich erkennbar. Mit steigender Belastung des Heizdrahtes tritt dann aber ein ausgesprochener Wendepunkt in den Kurven II, III, IV, V auf. Er liegt bei Normalbelastung zwischen 1 und 2 mm Abstand von der Heizfläche (II und V) und rückt bei 1½facher Belastung zu etwas größeren Werten nach etwa 2 mm (III). Wird die Rinne verdeckt, so scheint er sich nicht merklich im Abstande zu verschieben (III und IV).

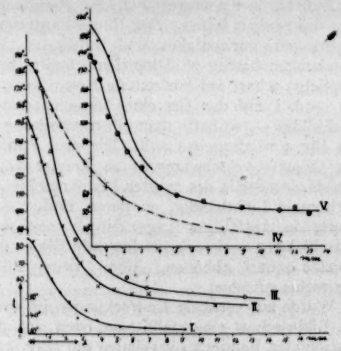


Fig. 2.

Die gefundenen Funktionen für t zeigen im allgemeinen Verlaufe Ähnlichkeit mit der vorgeschlagenen Gleichung[1]). Die Kurven schneiden ersichtlich die Grenze der veränderlichen Temperatur ($x=0$) unter endlicher Neigung, besitzen einen Wendepunkt und sind gegen einen Grenzwert ($t=0$, $x=\infty$) asymptotisch. Ohne Zweifel liegen aber auch zwischen der Formel und den Kurven systematische Abweichungen vor. Der Wendepunkt ersterer trennt die Funktion in zwei zu ihm symmetrische Äste. Das scheint für die Kurven nicht zuzutreffen. Ferner fallen diese zum asymptotischen Grenzwerte viel langsamer ab, als es der Gleichung entsprechen würde. Dieser Teil der Funktionen spielt aber auch bei den Luftspiegelungen eine nur geringe Rolle.

Das dreifache Bild eines Spaltes. Durch das 19fach vergrößernde Fernrohr eines Theodoliten wurden das direkte Bild eines Spaltes und seine Spiegelbilder aus 9,4 m Entfernung des Fernrohrs von der Rinne beobachtet, der Abstand der Bilder und die Neigungen der Blicklinien gegen den Horizont gemessen. Die Veränderung der Bildentwicklung mit wachsender Belastung des Heizdrahtes zeigt folgende Beobachtungsreihe.

Bei 88 Watt Heizeffekt war überhaupt noch keine Spiegelung zu sehen. Wohl traten „Kimmungen", Verrückungen und Verzerrungen des Objekts ein, wenn man durch die warme Luft

1) Siehe voranstehenden Aufsatz.

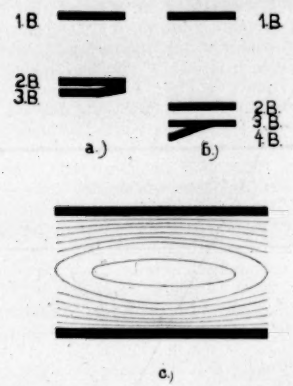


Fig. 3.

nach dem Spalt blickte. Vergrößerung der Belastung auf 225 Watt rief deutlich Spiegelung hervor. Objekt und Bild waren nur wenig voneinander getrennt. Der Abstand vergrößerte sich mit wachsender Belastung. Er konnte bei Vollbelastung (330 Watt) 20′ betragen. Schon bei dieser Belastung spaltete sich vom Spiegelbilde des Spaltes ein zweiter heller Streifen ab, wenn man das Fernrohr und den Spalt so einstellte, daß das Spiegelbild in die Nähe der Spiegelgrenze fiel (Fig. 3a). Die Trennung der beiden Bilder war nicht beständig, es fanden Trennungen und Wiedervereinigungen statt. Der Abstand war je nach Anordnung von Spalt und Rinne 1′ bis 2′. Bei höherer Belastung des Heizdrahtes trennten sich das zweite und dritte Bild dauernd und rückten mehr und mehr auseinander. Ihr Abstand konnte bei 720 Watt Heizeffekt auf über 3′ gebracht werden. Dabei wurde eine unerwartete Beobachtung gemacht. Unter ganz derselben Erscheinung, wie früher sich vom zweiten das dritte Bild abspaltete, schien sich bei den hohen Belastungen vom dritten ein viertes Bild zu trennen (Fig. 3b). Wenigstens zerfiel das dritte Bild an dem einen Ende in zwei Teile, die aber nie völlig getrennt erblickt wurden.

Zwischen zweitem und drittem Bilde lag regelmäßig ein System z. T. geschlossener Interferenzlinien (Fig. 3c). Sie schnürten sich punktförmig zusammen und verschwanden, wenn die Bilder bei ihren Schwankungen einmal zusammenflossen. Die Linien verbinden Orte gleicher Phasendifferenz der in ihnen vom Objekte her auf zwei verschiedenen Wegen zur Vereinigung kommenden Lichtbüschel. Die beiden Bilder begrenzen den Interferenzraum. Danach haben die Bildorte offenbar überhaupt keine Phasendifferenz mehr. Somit bietet die Beobachtung eine interessante Bestätigung des bekannten Satzes von Fermat. Es gibt Bilder danach in einer solchen Anzahl, als Lichtwege zwischen Objekt und Beobachtungsort vorhanden sind, die in gleicher Zeit durchlaufen werden.

Das Fernrohr zeichnete das zweite Bild nicht scharf, wenn auf das Objekt scharf eingestellt wurde und umgekehrt. Genauere Beobachtung lehrte, daß das zweite Bild zwischen Objekt und Beobachter innerhalb der Rinne etwa 10 cm von ihrem zugewandten Ende entfernt anzusetzen war. Das dritte Bild schien nahe in Objektentfernung zu liegen.

Das dreifache Bild eines flächenhaften Objekts. In Folie wurden drei sehr feine Löcher eingestochen, die auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks von etwa 1 mm Seitenlänge lagen. Dieses Dreieck, von rückwärts beleuchtet, diente als Objekt. Beobachtet wurde zunächst aus 4,41 m Entfernung des Fernrohrs von der Rinne. Bei unverdeckter Rinne glückte es nur selten, das dreifache Bild aufzusuchen. Überraschenderweise wurde es recht regelmäßig gefunden, wenn die Rinne oben lose mit Handtüchern oder Klötzen verdeckt wurde. Das dritte Bild lag stets in unmittelbarer Nähe der Spiegelgrenze und des zweiten Bildes. Der Abstand dieser beiden Bilder wurde durch die Abdeckung der Rinne nicht merklich geändert, er betrug wie früher etwa 2′ bei Normalbelastung und konnte mit höherer Belastung auf 3′ gebracht werden. Der Abstand des zweiten Bildes vom ersten ging durch die Bedeckung hingegen stets außerordentlich zurück, in einem Falle von 20′ auf 7′.

Äußerst lästig erwies sich der Astigmatismus des zweiten Bildes. Der Einstellungsunterschied der horizontalen und vertikalen Erstreckungen betrug 27 Dioptrien. Stellte man möglichst scharf auf horizontale Erstreckungen ein — d. i. auf den Ort eines fiktiven zweiten Spaltbildes —, so hatte man einen Anblick, wie ihn Fig. 4 wiedergeben soll. Die drei Punkte des Objekts verschwammen zu Zerstreuungskreisen. An Stelle des zweiten Bildes erschienen horizontale Lichtbänder, an deren Enden sich häufig in auffälliger gegenseitiger seitlicher Verschiebung zwei verkehrt liegende Bilder des Objekts scharf abhoben. Vom dritten Bilde war nichts zu sehen.

Wurde auf vertikale Erstreckungen im zweiten Bilde scharf eingestellt, so zerrten sich die horizontalen Bänder zu vertikalen um (Fig. 5a). Gleichzeitig wurde das erste Bild scharf. Dar-

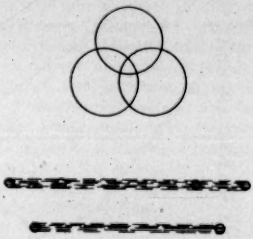


Fig. 4.

unter erschien nun scharf, aber äußerst beweglich und lichtschwach, das dritte Bild oder nur ein Teil desselben. Häufig war von ihm nur ein einziger scharfer Punkt zu sehen (Fig. 5a), indem die beiden andern in den vertikalen Strichen des zweiten verschwanden;

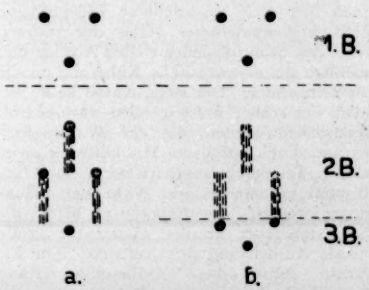


Fig. 5.

manchmal löste sich aber auch für einige Zeit ein vollkommenes Bild los (Fig. 5b). Es hatte die aufrechte Lage des dritten Bildes nach Vince und zeigte die diesem Bilde charakteristische Zusammendrückung. Die Bilder wurden in sehr viel schärferer Zeichnung erhalten, als auf das mehrere Zentimeter im Durchmesser haltende Fernrohrobjektiv eine Lochblende von etwa 9 mm² Fläche gesetzt wurde. Wählte man dann eine mittlere Einstellung der Bildschärfe zwischen erstem und zweitem Bilde, so konnte man sehr gut die Anordnung der Punkte beobachten, wie sie Fig. 6 zeigt. Manchmal kam das dritte Bild nicht zur völligen Entwicklung, weil der Raum zwischen zweitem Bilde und der Spiegelgrenze zu klein war (Fig. 6a und 6b).

Diskussion der Beobachtungen. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß die Luftschichten, in denen die Scheitel der Strahlen liegen, die das dritte Bild erzeugen, der Heizfläche unmittelbar benachbart sind. Da die Verdeckung der Rinne wenig Einfluß auf den Abstand des zweiten und dritten Bildes voneinander hat, ist offenbar jener Teil der Temperaturfunktion für die Entstehung des dritten Bildes maßgebend, der auch dabei keine wesentliche Änderung erleidet. Ein Vergleich der Kurven III und IV in Fig. 2 zeigt, daß daher diese Schichten innerhalb des ersten Millimeters liegen müssen. Zu demselben Resultate führt eine rechnerische Schätzung auf Grund der Gleichung 3 der voranstehenden Abhandlung. Der Wendepunkt würde von diesen Schichten also höchstens gerade erreicht werden. Bei geringeren Belastungen, wobei ein Wendepunkt nicht deutlich auftrat, fehlte auch das dritte Bild. Gegen die Grenze der Abbildung hin konvergiert ferner die Vergrößerung nicht gegen Null. Das zeigen die Abbildungen Fig. 6. Daher ist auch die Art der Abbildung mit der endlichen Neigung der Temperaturfunktionen an der Grenze des Mediums in Einklang.

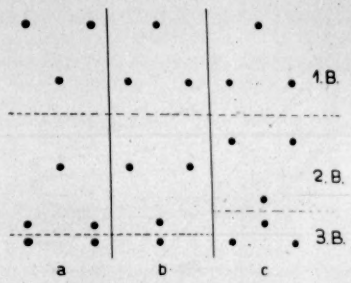


Fig. 6.

Die Temperaturfunktion der bestrahlten Mauer. Ähnlich wie an der Heizfläche der Rinne wurde versucht, die Temperaturfunktion an der Mauer mit Thermoelementen aufzunehmen. In frühen Nachmittagsstunden, während bei Sonnenschein die Luftspiegelung in sehr guter Entwicklung, durch den Feldstecher auch häufig mit dem dritten Bilde, zu beobachten war, wurden die Messungen vorgenommen. Die außerordentliche Unbeständigkeit der Einstellung des Galvanometers störte stark. Nur in nächster Wandnähe waren die Temperaturen stabiler. Die Beobachtungen, die die Kurven I und II der Fig. 7 bestimmen, entspringen einer länger dauernden Mittelwertsbildung. Die Kurven stellen also eine mittlere Verteilung der Temperatur dar. Hingegen wurden die anderen Kurven III, IV, V, VI gewonnen, indem möglichst rasch in einem Zuge

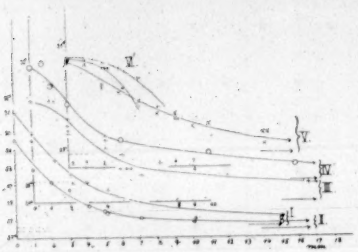


Fig. 7.

auf eine Einstellung die nächste folgte. Sie stellen somit Verteilungen dar, die mehr einzelnen Phasen der immer wechselnden Verhältnisse entsprechen. Die in Fig. 7 eingezeichneten Pfeile geben die asymptotischen Grenzwerte der Temperatur bei großen Abständen von der Wand an.

Das Ergebnis der neuen feineren Durchmessung bestätigt im allgemeinen durchaus den früheren thermometrischen Befund und die daraus gezogenen Schlüsse, obgleich das Intervall der Beobachtung jetzt ein anderes ist. Der mittleren Temperaturverteilung (Kurve I und II, Fig. 7) ohne Wendepunkt kann niemals ein drittes Bild entsprechen. Es treten aber länger dauernde Verteilungen mit mehr oder minder hervorgehobenen Wendepunkten auf. Das dritte Bild der früher veröffentlichten photographischen Aufnahme[1]) verlangt nach seiner relativen Größe für die Scheitel der erzeugenden Strahlen ein Temperaturintervall von $^7/_{16}\ t_0$. Das würde nach den Kurven (Fig. 7) 2,5° bis 2,6° ausmachen. Ein solcher Betrag würde in den Kurven IV und VI etwa in die Gegend des Wendepunktes führen, während dieser in den Kurven III und V überschritten wird. Die photographische Aufnahme muß also gerade in einem für die Entwicklung des dritten Bildes besonders günstigen Augenblicke gemacht worden sein. Die Schichten, die das dritte Bild erzeugen, liegen auch hier der warmen Wand offenbar äußerst nahe an; sie befinden sich in keinem größeren Abstande als etwa 5 mm. Das ist ein unerwartetes Ergebnis der Messungen. Früher[2]) hatte ich das wirksame Temperaturgebiet als von größerer Ausdehnung schätzen zu müssen geglaubt. Dafür haben die Messungen keinen Anhalt gegeben, die Schätzung ist auf obigen Betrag einzuschränken.

1) a. a. O. Fig. 2, Tafel XXVIII.
2) a. a. O. S. 723.

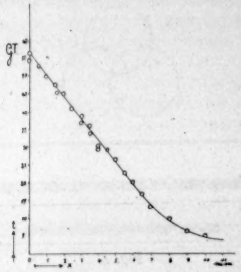


Fig. 8.

Die Form der Temperaturverteilung. Die Temperaturverteilung an der künstlich geheizten Fläche und die der Kurven III—IV (Fig. 7) an der Wand sind bemerkenswert ähnlich. Man kann in ihnen drei Abschnitte erkennen, den wenig ausgedehnten Teil geringen Abfalls in unmittelbarer Nähe der warmen Fläche, den dann folgenden steilen Absturz und schließlich die asymptotische Näherung an die Außentemperatur. Der steile Abfall kann vermutlich der schnell aufsteigenden warmen Luft zugeschrieben werden, die viel Wärme fortführt und durch turbulente Mischung für einen schnellen Temperaturausgleich sorgt. Ihr Einfluß muß in unmittelbarer Nähe der Fläche geringer werden. Im Experiment liefert die hohe Temperatur, an der Mauer die große vertikale Ausdehnung den Auftrieb. Ein Experiment stützte diese Auffassung. Einer Kupferscheibe von 15 cm Durchmesser, die dicht auf einem Holzbrett saß, wurde durch das Brett hindurch Wärme zugeführt, so daß sie etwa 5° Temperaturüberschuß über die Umgebung hatte. Fig. 8 zeigt dann die Verteilung der Temperatur vor der Scheibe, wie sie mit derselben Anordnung bestimmt wurde, die zur Aufnahme der Kurven (Fig. 7) diente. (Die Ordinaten sind Galvanometerteile, 10,9 Teile = 1° C.)

(Eingegangen 3. Februar 1914.)

Welche Strahlungsformel folgt aus der Annahme der Lichtatome?

Von M. Wolfke.

Herr P. Debye hat vor einigen Jahren bewiesen, daß zur Ableitung der Planckschen Strahlungsformel allein die Annahme genügt,

daß sich die Energie über die Eigenschwingungen in ganzen Quanten $h\nu$ verteilt[1]).

Ohne von dieser Arbeit Kenntnis zu haben, kam ich zu einem ähnlichen Resultat, indem ich auf Grund der Lichtatomenhypothese sowohl die Quanten $h\nu$ selbst, als auch die Planckschen Strahlungsformel ableitete[2]).

Herr G. Krutkow hingegen hat darauf hingewiesen, daß aus der Annahme der Einsteinschen unabhängigen Lichtquanten die Wiensche Strahlungsformel folgt[3]).

Da aus der Abhandlung des Herrn G. Krutkow nicht deutlich hervorgeht, worin die eigentliche Ursache besteht, daß derselbe im Gegensatz zu P. Debye und zu mir das Wiensche Strahlungsgesetz erhalten hat, so will ich hier darauf näher eingehen.

Vor allem muß ich kurz meine Ableitung der Planckschen Strahlungsformel andeuten.

§ 1. Die Lichtatome. Nehmen wir an, daß die Lichtenergie im Raume diskontinuierlich in Punkten verteilt ist, die wir Lichtatome nennen. Indem wir auf Grund der Relativitätstheorie für die Masse m eines Lichtatoms mit der Energie ε:

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2}$$

setzen, und die Reflexion solcher Lichtatome an bewegten Spiegeln betrachten, so finden wir, daß jedes Lichtatom sowohl seine Frequenz ν, als auch seine Energie ε ändern kann, jedoch beide gleichzeitig in dieser Weise, daß stets die Bedingung

$$\varepsilon = h\nu$$

erfüllt bleibt[4]).

§ 2. Die Strahlungsformel. Bezeichnen wir a priori mit w_ν die „thermodynamische Wahrscheinlichkeit" für die Existenz eines Lichtatoms in dem Volumen V, mit der Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$. Die Größe w_ν bedeutet also die Zahl aller verschiedenen Möglichkeiten, auf welche ein Lichtatom mit der Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ im Volumen V realisierbar ist. Um die Wahrscheinlichkeit W_ν der gleichzeitigen Existenz von N_ν solcher Lichtatome im Volumen V zu bestimmen, muß man die N_ν Lichtatome über die w_ν verschiedenen Realisierungsmöglichkeiten verteilen. Alsdann ist die Zahl der Komplexionen gleich der Anzahl der „Kombinationen mit Wiederholung von w_ν Elementen zur $N_\nu$ten Klasse". Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich:

$$W_\nu = \frac{(w_\nu + N_\nu - 1)!}{(w_\nu - 1)!\, N_\nu!}.$$

Daraus folgt nach dem Boltzmannschen Prinzip für die Entropie S_ν folgender Ausdruck:

$$S_\nu = k w_\nu \left\{ \left(1 + \frac{N_\nu}{w_\nu}\right) \log \left(1 + \frac{N_\nu}{w_\nu}\right) - \frac{N_\nu}{w_\nu} \log \frac{N_\nu}{w_\nu} \right\};$$

der schließlich zu der Planckschen Strahlungsformel führt[1]).

§ 3. Die entscheidenden Voraussetzungen. Auf den prinzipiellen Unterschied zwischen der Einsteinschen Lichtquantentheorie und der obigen Betrachtung hat mich Herr Einstein persönlich aufmerksam gemacht.

Allein maßgebend für die abgeleiteten Strahlungsformeln ist die in den Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen vorausgesetzte Definition der Unabhängigkeit der Lichtatome voneinander.

In der obigen Ableitung (§ 2) der Planckschen Strahlungsformel wird nur diese allgemeine Annahme benutzt, daß die Lichtatome in bezug auf ihre **Existenz** voneinander **unabhängig** sind, es wird in anderen Worten angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines Lichtatoms von einer bestimmten Frequenz davon unabhängig ist, wieviel Lichtatome von der gleichen Frequenz im betrachteten Volumen gleichzeitig vorhanden sind.

In bezug auf die räumliche Verteilung der Lichtatome wurden jedoch in meiner Ableitung keine beschränkenden Voraussetzungen aufgestellt.

Die Einsteinsche Lichtquantentheorie setzt jedoch im Gegensatz hierzu den speziellen Fall voraus, daß die Lichtatome auch **räumlich** voneinander **unabhängig** sind, d. h., daß die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Lage eines Lichtatoms von der gleichzeitigen Lage der anderen Lichtatome gleicher Frequenz unabhängig ist.

Demzufolge führt die Einsteinsche Lichtquantentheorie zu dem Wienschen Strahlungsgesetz, das bekanntlich als Spezialfall der Planckschen Strahlungsformel betrachtet werden kann.

§ 4. Die Resonatoren und die Lichtatome. Nur dann läßt sich eine Voraussetzung über die räumliche Verteilung der Lichtatome vermeiden, wenn man die Energieverteilung über die

1) P. Debye, Ann. d. Phys. (4) **33**, 1427, 1910.
2) M. Wolfke, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 1123, 1215, 1913.
3) G. Krutkow, diese Zeitschr. **15**, 133, 1914.
4) Vgl. M. Wolfke, l. c. § 1, 1123—1126.

1) Vgl. M. Wolfke, l. c. § 3, 1126—1128 und § 2, 1216—1217.

Lichtatome selbst, ohne Zuhilfenahme von Resonatoren, berechnet. Will man jedoch die Energieverteilung über die Resonatoren berechnen, so ist vor allem folgende Frage zu beantworten:

Ist die Aufnahme eines neuen Quants $h\nu$ durch einen Resonator davon abhängig, wieviel Lichtquanten dieser Resonator schon besitzt?

Diese Frage steht aber mit der räumlichen Verteilung der Lichtatome in engem Zusammenhang. Sind nämlich die Lichtatome im Raume gruppenweise verteilt, so werden sie auch gruppenweise von den Resonatoren aufgenommen; befinden sich die Lichtatome in bezug auf ihre Verteilung im Raume voneinander unabhängig, so wird auch die Aufnahme eines jeden Quants durch einen Resonator ein unabhängiges Ereignis sein.

§ 5. Die räumliche Verteilung der Lichtatome. Betrachten wir die räumliche Verteilung der Lichtatome, so muß uns folgendes auffallen.

Bei großen Werten von λT, also bei großer Strahlungsdichte, wo das Rayleigh-Jeanssche Strahlungsgesetz gilt, scheint die Strahlung einen kontinuierlichen Charakter zu besitzen.

Mit abnehmender Strahlungsdichte, bei kleineren λT, tritt der diskontinuierliche Charakter der Strahlung auf.

Im Bereich, wo die Plancksche Strahlungsformel allein gilt, scheinen „Lichtmoleküle" vorhanden zu sein, die aus gruppenweise verteilten Lichtatomen bestehen.

Bei weiter abnehmender Strahlungsdichte, wo die Wiensche Strahlungsformel anwendbar ist, dissoziieren sich diese „Lichtmoleküle" in einzelne voneinander unabhängige Lichtatome[1]).

1) Vgl. M. Wolfke, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 4, 1914.

Zürich, Februar 1914.

(Eingegangen 17. Februar 1914.)

Zusatz zu meiner Arbeit „Theoretisches über das elektrische Analogon des Zeemanphänomens".

Von A. Garbasso.

In der betreffenden Arbeit habe ich den Abstand der äußeren (dem Felde parallelschwingenden) Komponenten berechnet, was übrigens, wie ich nachher erfuhr, auf ganz ähnliche Weise Herrn Warburg schon gelungen war.

Eine Erklärung für die inneren (dem Felde senkrechten) Komponenten war aber nicht zu finden. Ich habe sie wiederholentlich, aber immer vergebens gesucht.

Nun ist vielleicht die Bohrsche Theorie in ihrer jetzigen Form unfähig, die Erscheinung zu berechnen; gerade deshalb, weil sie, wie für das Zeemansche Phänomen, auch für den neuen Effekt einer ganzen Linienserie ein einziges Auflösungsgesetz vorschreiben muß.

Dies schien auch nach den ersten Angaben von Professor Stark, wie von Herrn Lo Surdo, durchaus richtig, wird aber durch neuere Beobachtungen an starken Feldern nicht mehr bestätigt.

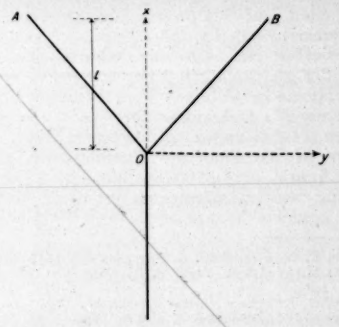
So haben z. B. Lo Surdo und Puccianti gefunden, daß, während aus jeder Linie der Balmerschen Serie immer zwei dem Felde parallel schwingende Komponenten zu erhalten sind, die Zahl der senkrechten Komponenten von Glied zu Glied zunimmt und der Ordnungszahl genau gleich ist.

Die für diese Beobachtung geeigneten, sehr starken Felder können ohne Schwierigkeiten in dünnen Röhren nach Lo Surdos Verfahren erregt werden.

Es werden sich wohl die Fachgenossen für einige genaue Angaben über die günstigsten Versuchsbedingungen interessieren.

In einer Röhre von 1,5 mm Durchmesser, bei einer Potentialdifferenz von etwa 8000 Volt und einer Stromintensität von 1 Milliampere, zieht sich die erste Kathodenschicht zu einer Strecke von 2 mm zusammen; so bekommt man einen mittleren Potentialabfall von ungefähr 40000 Volt/cm zur Verfügung.

Werden nun die äußeren Komponenten irgendeiner Linie aus der Balmerschen Serie aufgenommen, indem die Röhre dem Spalt parallel gehalten wird, so erhält man eine Art Y-Figur.



Hierbei sind die Punkte A und B auf der Kathode zu denken, während O an der Grenze der ersten Schicht liegt.

Die Gleichung der Geraden OB sei

$$x = ay.$$

Nun ist nach Stark

$$y = -k\frac{dV}{dx},$$

also

$$x = -ak\frac{dV}{dx}, \qquad (1)$$

und hieraus

$$\frac{x^2}{2} = ak(V_0 - V_x),$$

und für $x = l$ (d. h. an der Oberfläche der Kathode)

$$\frac{l^2}{2} = ak(V_0 - V_l).$$

Nach (1) ist aber

$$l = -ak\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=l},$$

und wir bekommen

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=l} = 2\frac{V_l - V_0}{l}.$$

Unter den oben geschilderten Versuchsbedingungen hat man also, unmittelbar vor der Kathode, ein Feld von etwa 80000 Volt/cm. Die Verhältnisse unter diesen recht günstigen Umständen können nun abgesondert studiert werden, indem man die Röhre dem Spalte senkrecht stellt. Der Effekt ist mit jedem Spektroskop direkt zu beobachten. Freilich muß man von Zeit zu Zeit den Strom unterbrechen, damit die Röhre nicht beschädigt wird. Man kann aber auf eine andere Weise fertig werden, indem man die Röhre einfach in flüssige Luft taucht, wobei der Effekt unverändert bleibt.

Florenz, den 25. Februar 1914.

(Eingegangen 28. Februar 1914.)

BESPRECHUNGEN.

N. R. Campbell, Moderne Elektrizitätslehre. Übersetzt von U. Meyer. gr. 8. X u. 423 S. Dresden, Th. Steinkopff. 1913. M. 14.—, geb. M. 15.50

Vorliegende warm zu empfehlende Monographie wendet sich an Leser, die bereits eine gewisse Kenntnis der experimentellen und theoretischen physikalischen Grundlagen sowie der mathematischen Hilfsmittel besitzen. Es sind in erster Linie im Zusammenhang die verschiedenen, zur Erklärung der in früherer wie in neuester Zeit entdeckten Erscheinungen herangezogenen Theorien beschrieben. Das Hauptgewicht der Darstellung ist erfreulicherweise auf klares Herausschälen des mathematischen Ansatzes aus den physikalischen Vorstellungen gelegt. Mathematische Entwicklungen sind nur insoweit gebraucht, als es zur Erläuterung der physikalischen Beweismittel erforderlich ist. Verfasser beabsichtigt eine Erweiterung und Vertiefung des physikalischen Verständnisses, nicht eine Ausbildung im Rechnen.

Das Buch zerfällt in drei annähernd gleich umfangreiche Abschnitte, die der Elektronentheorie, der Elektrizität, der Korpuskular- und Wellenstrahlung und den Beziehungen zwischen Elektrizität und Materie gewidmet sind.

Der erste Teil bringt zunächst eine vielleicht zu knappe Ableitung der Grundformeln der Elektronentheorie; als Anhang ist die Theorie der Kraftröhren in der von J. J. Thomson herrührenden Form dargestellt. In den beiden folgenden Kapiteln ist die Elektronentheorie der Isolatoren und Leiter im wesentlichen nach Drude behandelt, mit Einschluß der Thermoionik nach Richardson. Es folgt eine Darstellung der Ionen- und Elektronentheorie, der Elektrizitätsleitung in Gasen und der Elektronentheorie des Magnetismus nach Langevin. Den Schluß des ersten Teils bildet ein Kapitel über Magnetooptik, dem sich ein zusammenfassender Überblick über die verschiedenen Anwendungsgebiete der Elektronentheorie anschließt.

Im zweiten Teil über die Strahlung wird zunächst über die α- und β-Strahlung radioaktiver Substanzen berichtet. In dem folgenden, der Lichtstrahlung gewidmeten Kapitel sind verhältnismäßig sehr ausführlich die die Struktur des natürlichen Lichts betreffenden Fragen diskutiert, außerdem verschiedene aktuelle Fragen, wie Struktur der Spektrallinien, besprochen, ferner der lichtelektrische Effekt, Phosphoreszenz und Fluoreszenz behandelt. Das nächste Kapitel bringt die Gesetze der schwarzen Strahlung und die an die Planck'sche Formel sich anschließenden Theorien, insbesondere natürlich die Quantentheorie zur Darstellung. Die Besprechung der Eigenschaften der γ- und Röntgen-Strahlung ist an den Schluß dieses Teils gestellt, weil nach Ansicht des Verfassers bis jetzt keine der vorgeschlagenen Theorien dieser Strahlen alle Erscheinungen einwandfrei erklären kann.

In dem letzten Teil findet man zunächst die Beziehungen zwischen optischen und mechanischen Eigenschaften der Materie, die zuerst von Madelung und Sutherland aufgefunden sind, die Formeln für die Berechnung der spezifischen Wärme aus den elastischen Konstanten entwickelt; weiter sind die Beziehungen zwischen optischen und chemischen Eigenschaften dargestellt. Es folgt eine Reihe von Betrachtungen über die Aufschlüsse, die die Erscheinungen der Gasionisation, der Radioaktivität und der Röntgenstrahlen über die Konstitution des Atoms geben können. Eingehender wird über die Theorie des Thomsonschen und namentlich des Starkschen Atommodells gesprochen. Eine Darstellung des Relativitätsprinzips bildet den Schluß des Buches.

Die Darstellung ist, wie sehr anerkannt werden muß, in hohem Maße klar, anschaulich und namentlich auch anregend geschrieben. In sich wider-

spruchsfrei ist dieselbe nicht, was sie bei dem Gegensatz von Maxwellscher und Quanten-Theorie auch gar nicht sein kann; es ist dem Verfasser jedenfalls gelungen, einen Umriß der „modernen" Elektrizitätslehre zu geben, der vor allem für reife Studierende wertvoll ist. Am Schlusse jedes Abschnitts finden sich Literaturhinweise, die sich auf die wichtigsten Lehrbücher und wissenschaftlichen Arbeiten über den gerade behandelten Stoff beschränken. Instruktive numerische Beispiele sind vielfach eingefügt. Ausstellungen, die zu machen sind, beziehen sich nur auf Einzelheiten, und zwar meist auf Zitate von Namen der Autoren, deren Leistungen gerade besprochen werden; eine einzige sei an dieser Stelle erwähnt: es ist wohl nicht richtig, die Versuche von E. Wiechert über die Bestimmung von e/m an Kathodenstrahlen als nicht sehr erfolgreich zu bezeichnen. G. Rümelin

P. Volkmann, Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. Vorlesungen. Zweite, mehrfach umgearbeitete Auflage. gr. 8. XVI u. 412 S. u. 23 Figuren. Leipzig, B. G. Teubner. 1913. M. 13.—, gebunden M. 14.—

Der Inhalt gliedert sich in folgende Abschnitte: I. Einleitende Vorbemerkungen (Koordinaten- und Vektorenrechnung, Hauptsätze aus der analytischen Koordinatengeometrie). II. Die Grundlagen der Galilei-Newtonschen Mechanik und ihre Konsequenzen für die Mechanik eines materiellen Punktes bzw. eines Massenpunktes. III. Die Mechanik eines Massensystems für diskrete und kontinuierliche Massen. IV. Anwendungen auf die praktische Physik. Methoden- und Instrumentenlehre (Instrumente mit vertikaler und horizontaler Schwingungsfähigkeit. Maßeinheiten und Dimensionen). V. Theorie der Hydrostatik (einschließlich Kapillaritätstheorie). VI. Einführung in die Behandlung geophysikalischer Fragen (besonders solcher, die in das Gebiet der Mechanik fallen). VII. Einführung in die allgemeinen Prinzipe der Mechanik. VIII. Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis.

Diese Vorlesungen sind zum Selbststudium für den jungen Studenten hervorragend geeignet. Die mathematischen Ableitungen zeichnen sich durch große Übersichtlichkeit aus, das Historische kommt, nach dem Beispiel Machs, daneben besonders zur Geltung. Ebenso auch das Erkenntnistheoretische. Hierfür ist mehr Interesse vorhanden, als vielfach angenommen zu werden pflegt. Das Werk kann nicht nur Studierenden, sondern auch als Grundlage für einleitende Vorlesungen angelegentlichst empfohlen werden. Reinganum.

F. Auerbach, Die Weltherrin und ihr Schatten. Ein Vortrag über Energie und Entropie. 2., ergänzte und durchgesehene Auflage. gr. 8. 74 S. Jena, G. Fischer. 1913. M. 2.—

In diesem anregend geschriebenen Aufsatz behandelt der Verf. in allgemein verständlicher und stellenweise recht humorvoller und anschaulicher Weise die beiden Hauptsätze als die Grundlinien physikalischen Geschehens nach einer anfänglichen kurzen Abschweifung über die Konstanz der Masse. Was den zweiten Hauptsatz anlangt, so wird er als richtunggebendes Prinzip dargestellt, ohne näheres Eingehen auf eine genauere, strenge Formulierung der Entropie. Gegen die 1. Auflage[1]) unterscheidet sich die vorliegende unter anderem durch Hinzunahme einer Betrachtung über die Grenzen der Gültigkeit der Energie- und Entropiesätze, über das Verhalten der Energie und Entropie in der lebenden Substanz und über das Wesen des Psychischen. Die Art der Behandlung der mit diesen Dingen zusammenhängenden Fragen entspricht natürlich der vom Verf. in einer besonderen Schrift weiter ausgeführten Theorie über die entropische Natur der Lebensenergie und wird nicht jeden ganz befriedigen, kann sogar manchen lebhaften Widerspruch hervorrufen.

In einem Anhang sind eine Reihe von Anmerkungen beigefügt, samt einem Literaturverzeichnis, welche manchen, die etwas weiter in den Stoff eindringen möchten, erwünscht sein werden.

1) Siehe diese Zeitschr. **4**, 280, 1903.

S. Valentiner.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Bonn Dr. Robert Wintgen für Chemie, an der Universität Göttingen Dr. Wilhelm Behrens für Mathematik.

Ernannt: Der Privatdozent für Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Professor Dr. Siegfried Hilpert zum Abteilungsvorsteher am Kaiser-Wilhelm-Institut für Kohlenforschung in Mülheim (Ruhr), der Privatdozent an der Universität Berlin Professor Dr. Erich Regener zum etatsmäßigen Professor der Physik an der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin, der Privatdozent an der Universität Leipzig Dr. Robert König zum etatsmäßigen a.o. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen.

Verliehen: Dem Privatdozenten für physikalische Medizin an der Universität Kiel Dr. Heinrich Schade der Titel Professor.

Gesuche.

Physiker, Dr. phil.,

Universitätsassistent, mit besten Zeugnissen, Staatsexamen, sucht **Stellung an physikalischem Institut.** Anfragen erbeten unter **S. H. 410** an die Expedition dieser Zeitschrift.

Physiker und Elektrotechniker

mit langjähriger Erfahrung in der Fabrikation

physikalischer Apparate

sucht sich baldigst zu verändern. Nur leitende Stellung in größerer Fabrik, eines ähnlichen Industriezweiges, kommt in Frage. Suchender würde auch Neueinrichtung oder Reformierung eines vorhandenen Betriebes übernehmen. Es wollen sich auch Kapitalisten melden, die eventuelle Neugründung finanzieren würden. Angebote erbeten unter **S. H. 411** an die Expedition dieser Zeitschrift.

Für die Redaktion verantwortlich Dr. Hans Busch in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.